Graphes

Prof d'info

Lycée Thiers

Crédits

- Wikipédia : théorie des graphes
- Wikipédia : graphes simples
- Toujours le Mansuy.

Les sept ponts de Königsberg

- Un article du mathématicien suisse Leonhard Euler, présenté à l'Académie de Saint-Pétersbourg en 1735 puis publié en 1741.

Les sept ponts de Königsberg

- Un article du mathématicien suisse Leonhard Euler, présenté à l'Académie de Saint-Pétersbourg en 1735 puis publié en 1741.
- Trouver une promenade à partir d'un point donné qui fasse revenir à ce point en passant une fois et une seule par chacun des sept ponts de la ville de Königsberg : Circuit *eulérien*.

Les sept ponts de Königsberg

- Un article du mathématicien suisse Leonhard Euler, présenté à l'Académie de Saint-Pétersbourg en 1735 puis publié en 1741.
- Trouver une promenade à partir d'un point donné qui fasse revenir à ce point en passant une fois et une seule par chacun des sept ponts de la ville de Königsberg : Circuit *eulérien*.
- Euler fut sans doute le premier à proposer un traitement mathématique de la question, suivi par Vandermonde.

Les sept ponts de Königsberg

- Un article du mathématicien suisse Leonhard Euler, présenté à l'Académie de Saint-Pétersbourg en 1735 puis publié en 1741.
- Trouver une promenade à partir d'un point donné qui fasse revenir à ce point en passant une fois et une seule par chacun des sept ponts de la ville de Königsberg : Circuit *eulérien*.
- Euler fut sans doute le premier à proposer un traitement mathématique de la question, suivi par Vandermonde.

FIGURE – Abstraction du problème des 7 ponts de Königsberg

- 

Les sept ponts de Königsberg

- Un article du mathématicien suisse Leonhard Euler, présenté à l'Académie de Saint-Pétersbourg en 1735 puis publié en 1741.
- Trouver une promenade à partir d'un point donné qui fasse revenir à ce point en passant une fois et une seule par chacun des sept ponts de la ville de Königsberg : Circuit *eulérien*.
- Euler fut sans doute le premier à proposer un traitement mathématique de la question, suivi par Vandermonde.

FIGURE – Abstraction du problème des 7 ponts de Königsberg

- 

- Théorème : *Un graphe connexe admet un circuit eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.*
  Ici un des sommets a 3 *voisins* : pas de circuit eulérien.

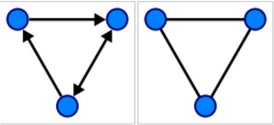
Informellement

- Un graphe est un ensemble de points dans lequel on fait apparaître une ou plusieurs relations(s) entre deux points.
  Ces relations sont en général représentées par des flèches ou par des segments. Dans le premier cas, le graphe est dit *orienté* et les liens sont appelés des *arcs*. Dans le second, le graphe est dit *non* orienté et les liens sont souvent appelés des *arêtes*.

Informellement

- Un graphe est un ensemble de points dans lequel on fait apparaître une ou plusieurs relations(s) entre deux points.
  Ces relations sont en général représentées par des flèches ou par des segments. Dans le premier cas, le graphe est dit *orienté* et les liens sont appelés des *arcs*. Dans le second, le graphe est dit *non* orienté et les liens sont souvent appelés des *arêtes*.
- Les points sont appelés les *sommets* (en référence aux polyèdres) ou les *nœuds* (en références à la loi des nœuds).

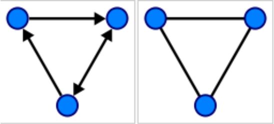
FIGURE – Un graphe orienté avec des arcs - un graphe non orienté et ses arêtes.



Informellement

- Un graphe est un ensemble de points dans lequel on fait apparaître une ou plusieurs relations(s) entre deux points.
  Ces relations sont en général représentées par des flèches ou par des segments. Dans le premier cas, le graphe est dit *orienté* et les liens sont appelés des *arcs*. Dans le second, le graphe est dit *non* orienté et les liens sont souvent appelés des *arêtes*.
- Les points sont appelés les *sommets* (en référence aux polyèdres) ou les *nœuds* (en références à la loi des nœuds).

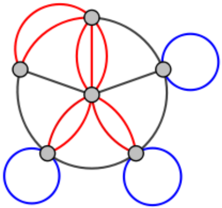
FIGURE – Un graphe orienté avec des arcs - un graphe non orienté et ses arêtes.



- Exemple : plan d'une ville.

Informellement

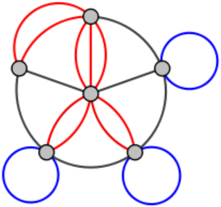
FIGURE – Un *multigraphe* non orienté : ses *arêtes multiples* en rouge et ses *boucles* en bleu



- En anglais, sommet se dit *vertice*, arête se dit *undirected edge* et arc se dit *directed edge*.

Informellement

FIGURE – Un *multigraphe* non orienté : ses *arêtes multiples* en rouge et ses *boucles* en bleu



- En anglais, sommet se dit *vertice*, arête se dit *undirected edge* et arc se dit *directed edge*.
- Les arêtes multiples ne sont pas au programme.

Graphe simple non orienté

La définition suivante ne s'applique pas aux graphes avec arêtes multiples.

Définition

Un *graphe (simple) non orienté* G est un couple (V, E) où $E \subseteq \mathcal{P}(V)$ est un ensemble de paires ou de singleton d'éléments de V.
On appelle *sommets* les éléments de V et *arcs* ceux de E.

- La lettre E est utilisée pour les arcs car en anglais, *arcs* se dit *edge*.

Graphe simple non orienté

La définition suivante ne s'applique pas aux graphes avec arêtes multiples.

Définition

Un *graphe (simple) non orienté* G est un couple (V, E) où $E \subseteq \mathcal{P}(V)$ est un ensemble de paires ou de singleton d'éléments de V.
On appelle *sommets* les éléments de V et *arcs* ceux de E.

- La lettre E est utilisée pour les arcs car en anglais, *arcs* se dit *edge*.
- Certains auteurs utilisent un vocabulaire spécial pour les graphes non orientés. Par exemple, une *arête* (*undirected edge*) désigne un arc.

Graphe simple non orienté

La définition suivante ne s'applique pas aux graphes avec arêtes multiples.

Définition

Un *graphe (simple) non orienté* G est un couple (V, E) où $E \subseteq \mathcal{P}(V)$ est un ensemble de paires ou de singleton d'éléments de V.
On appelle *sommets* les éléments de V et *arcs* ceux de E.

- La lettre E est utilisée pour les arcs car en anglais, *arcs* se dit *edge*.
- Certains auteurs utilisent un vocabulaire spécial pour les graphes non orientés. Par exemple, une *arête* (*undirected edge*) désigne un arc.
- Soit $a = \{x, y\}$. On dit que :

Graphe simple non orienté

La définition suivante ne s'applique pas aux graphes avec arêtes multiples.

Définition

Un *graphe (simple) non orienté* G est un couple (V, E) où $E \subseteq \mathcal{P}(V)$ est un ensemble de paires ou de singleton d'éléments de V.
On appelle *sommets* les éléments de V et *arcs* ceux de E.

- La lettre E est utilisée pour les arcs car en anglais, *arcs* se dit *edge*.
- Certains auteurs utilisent un vocabulaire spécial pour les graphes non orientés. Par exemple, une *arête* (*undirected edge*) désigne un arc.
- Soit $a = \{x, y\}$. On dit que :
  - a relie les sommets x et y, x et y sont *adjacents* ou encore *voisins*,

Graphe simple non orienté

La définition suivante ne s'applique pas aux graphes avec arêtes multiples.

Définition

Un *graphe (simple) non orienté* G est un couple (V, E) où $E \subseteq \mathcal{P}(V)$ est un ensemble de paires ou de singleton d'éléments de V.
On appelle *sommets* les éléments de V et *arcs* ceux de E.

- La lettre E est utilisée pour les arcs car en anglais, *arcs* se dit *edge*.
- Certains auteurs utilisent un vocabulaire spécial pour les graphes non orientés. Par exemple, une *arête* (*undirected edge*) désigne un arc.
- Soit $a = \{x, y\}$. On dit que :
  - a relie les sommets x et y, x et y sont *adjacents* ou encore *voisins*,
  - a est *incidente* avec x et y ou encore x et y sont *incidents* avec a.

Graphe simple orienté

Au programme ne figurent que les graphes avec au plus un seul arc d'un sommet à un autre.

Définition

Un *graphe simple orienté* G est un couple (V, A) où :

- V est appelé *l'ensemble des sommets* de G,

Graphe simple orienté

Au programme ne figurent que les graphes avec au plus un seul arc d'un sommet à un autre.

Définition

Un *graphe simple orienté* G est un couple (V, A) où :

- V est appelé *l'ensemble des sommets* de G,
- et $A \subseteq V^2$ est un ensemble de couples d'éléments de V appelé *l'ensemble des arcs* de G.

Graphe simple orienté

Au programme ne figurent que les graphes avec au plus un seul arc d'un sommet à un autre.

Définition

Un *graphe simple orienté* G est un couple (V, A) où :

- V est appelé *l'ensemble des sommets* de G,
- et $A \subseteq V^2$ est un ensemble de couples d'éléments de V appelé *l'ensemble des arcs* de G.

- La lettre V est utilisée pour les sommets car en anglais, sommet se dit *vertex* (au pluriel *vertices*).

Graphe simple orienté

Au programme ne figurent que les graphes avec au plus un seul arc d'un sommet à un autre.

Définition

Un *graphe simple orienté* G est un couple (V, A) où :

- V est appelé *l'ensemble des sommets* de G,
- et $A \subseteq V^2$ est un ensemble de couples d'éléments de V appelé *l'ensemble des arcs* de G.

- La lettre V est utilisée pour les sommets car en anglais, sommet se dit *vertex* (au pluriel *vertices*).
- Un *arbre* est un cas particulier de graphe orienté simple.

Graphe simple orienté

Au programme ne figurent que les graphes avec au plus un seul arc d'un sommet à un autre.

Définition

Un *graphe simple orienté* G est un couple (V, A) où :

- V est appelé *l'ensemble des sommets* de G,
- et $A \subseteq V^2$ est un ensemble de couples d'éléments de V appelé *l'ensemble des arcs* de G.

- La lettre V est utilisée pour les sommets car en anglais, sommet se dit *vertex* (au pluriel *vertices*).
- Un *arbre* est un cas particulier de graphe orienté simple.
- Mais pour certains auteurs, un arbre est un graphe non orienté connexe et acyclique (voir plus loin pour les définitions).

Graphe simple orienté

Un arc est noté $a = (x, y)$ ou $a = x \to y$ et on dit que :

- a *va* de x à y,

Graphe simple orienté

Un arc est noté $a = (x, y)$ ou $a = x \to y$ et on dit que :

- a *va* de x à y,
- x est l'*extrémité initiale* de a,

Graphe simple orienté

Un arc est noté $a = (x, y)$ ou $a = x \to y$ et on dit que :

- a *va* de x à y,
- x est l'*extrémité initiale* de a,
- y est l'*extrémité terminale* de a,

Graphe simple orienté

Un arc est noté $a = (x, y)$ ou $a = x \to y$ et on dit que :

- a *va* de x à y,
- x est l'*extrémité initiale* de a,
- y est l'*extrémité terminale* de a,
- y est un *voisin* de x. a est *incident à* x et y.

Degré

- Dans un graphe général (orienté ou non), on appelle degré d'un sommet s et on note $d(s)$, le nombre d'arcs incidents au sommet s.

Degré

- Dans un graphe général (orienté ou non), on appelle degré d'un sommet s et on note $d(s)$, le nombre d'arcs incidents au sommet s.
- Dans un graphe général orienté, on distingue le degré sortant ou extérieur $d^+(s)$ qui est égal au nombre d'arcs dont s est l'extrémité initiale et le degré entrant ou intérieur $d^-(s)$ qui est égal au nombre d'arcs dont s est l'extrémité finale.

Degré

- Dans un graphe général (orienté ou non), on appelle degré d'un sommet s et on note $d(s)$, le nombre d'arcs incidents au sommet s.
- Dans un graphe général orienté, on distingue le degré sortant ou extérieur $d^{+}(s)$ qui est égal au nombre d'arcs dont s est l'extrémité initiale et le degré entrant ou intérieur $d^{-}(s)$ qui est égal au nombre d'arcs dont s est l'extrémité finale.

$$
\begin{tikzcd}
S_1 \arrow[r] \arrow[dr] & S_2 \arrow[d] \\
S_5 \arrow[r] & S_3 \arrow[d] \\
 & S_4 \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

- $d^{-}(S_3) = 3$; $d^{+}(S_3) = 1$; $d(S_3) = 4$

Matrice d'adjacence sommets-sommets

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe *fini* simple.
Notons $\{v_1, \dots, v_n\}$ les sommets de S.
On appelle *matrice d'adjacence sommets-sommets de* $G = (S, A)$ la matrice $n \times n$ $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si il existe un arc de } v_i \text{ à } v_j \\ \qquad\qquad 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarque

- La matrice d'adjacence dépend de la numérotation des sommets. Il faut que cette numérotation soit connue pour comprendre la matrice.

Matrice d'adjacence sommets-sommets

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe *fini* simple.
Notons $\{v_1, \dots, v_n\}$ les sommets de S.
On appelle *matrice d'adjacence sommets-sommets de $G = (S, A)$* la matrice $n \times n$ $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si il existe un arc de } v_i \text{ à } v_j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarque

- La matrice d'adjacence dépend de la numérotation des sommets. Il faut que cette numérotation soit connue pour comprendre la matrice.
- A une numérotation des sommets correspond une unique matrice d'ajacence sommets-sommets.

Matrice d'adjacence sommets-sommets

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe *fini* simple.
Notons $\{v_1, \ldots, v_n\}$ les sommets de S.
On appelle *matrice d'adjacence sommets-sommets de* $G = (S, A)$ la matrice $n \times n$ $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si il existe un arc de } v_i \text{ à } v_j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarque

- La matrice d'adjacence dépend de la numérotation des sommets. Il faut que cette numérotation soit connue pour comprendre la matrice.
- A une numérotation des sommets correspond une unique matrice d'ajacence sommets-sommets.
- Inadaptée pour les arêtes (ou les arcs) multiples. Présence de boucle si $a_{ii} = 1$.

Matrice d'adjacence sommets-sommets

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe *fini* simple.
Notons $\{v_1, \ldots, v_n\}$ les sommets de S.
On appelle *matrice d'adjacence sommets-sommets de* $G = (S, A)$ la matrice $n \times n$ $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si il existe un arc de } v_i \text{ à } v_j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarque

- La matrice d'adjacence dépend de la numérotation des sommets. Il faut que cette numérotation soit connue pour comprendre la matrice.
- A une numérotation des sommets correspond une unique matrice d'ajacence sommets-sommets.
- Inadaptée pour les arêtes (ou les arcs) multiples. Présence de boucle si $a_{ii} = 1$.

Liste d'adjacence

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe *fini* simple.
On appelle *liste d'adjacence* de G toute liste de couples (s, ℓ) où s parcourt S et ℓ est *une* liste de ses voisins.

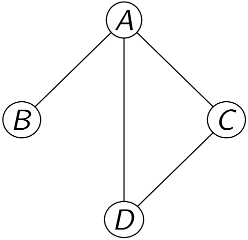
Remarque

Si une numérotation des sommets est choisie, on peut se contenter de donner la liste des voisins. La première liste donne les voisins du premier sommet, la seconde celle du second sommet etc...

Exemple de représentation

Cas non orienté

FIGURE – Un graphe non orienté



Matrice d'adjacence

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice symétrique.

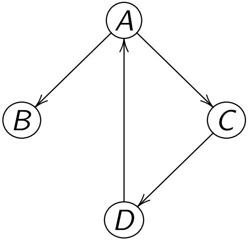
Liste d'adjacence

`[('A', ['B', 'C', 'D']), ('B', ['A']), ('C', ['A', 'D']), ('D', ['C', 'A'])]` ou `[['B', 'C', 'D'], ['A'], ['A', 'D'], ['C', 'A']]`

Exemple de représentation

Cas orienté

FIGURE – Un graphe orienté



Matrice d'adjacence

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice d'adjacence non symétrique.

Liste d'adjacence

`[('A', ['B', 'C']), ('B', []), ('C', ['D']), ('D', ['A'])]` ou `[['B', 'C'], [], ['D'], ['A']]`

Matrices d'adjacence : quelle représentation ?

- En PYTHON, les matrices d'adjacence sont simplement représentées par des *matrices carrées* c.a.d. des tableaux à deux dimensions avec même nombre de lignes que de colonnes.

Matrices d'adjacence : quelle représentation ?

- En PYTHON, les matrices d'adjacence sont simplement représentées par des *matrices carrées* c.a.d. des tableaux à deux dimensions avec même nombre de lignes que de colonnes.
- A la place de 0 et de 1, on peut utiliser des bouléens.

Matrices d'adjacence : quelle représentation ?

- En PYTHON, les matrices d'adjacence sont simplement représentées par des *matrices carrées* c.a.d. des tableaux à deux dimensions avec même nombre de lignes que de colonnes.
- A la place de 0 et de 1, on peut utiliser des bouléens.
- Implicitement on considère que les sommets sont des nombres. Ou alors on dispose d'un tableau de correspondance entre les sommets et leurs numéros (utile si les sommets contiennent des informations).

Matrices d'adjacence : quelle représentation ?

- En PYTHON, les matrices d'adjacence sont simplement représentées par des *matrices carrées* c.a.d. des tableaux à deux dimensions avec même nombre de lignes que de colonnes.
- A la place de 0 et de 1, on peut utiliser des bouléens.
- Implicitement on considère que les sommets sont des nombres. Ou alors on dispose d'un tableau de correspondance entre les sommets et leurs numéros (utile si les sommets contiennent des informations).
- Avec un tel choix :

Matrices d'adjacence : quelle représentation ?

- En PYTHON, les matrices d'adjacence sont simplement représentées par des *matrices carrées* c.a.d. des tableaux à deux dimensions avec même nombre de lignes que de colonnes.
- A la place de 0 et de 1, on peut utiliser des bouléens.
- Implicitement on considère que les sommets sont des nombres. Ou alors on dispose d'un tableau de correspondance entre les sommets et leurs numéros (utile si les sommets contiennent des informations).
- Avec un tel choix :
  - il est facile de supprimer ou d'ajouter un arc entre deux sommets existants.

Matrices d'adjacence : quelle représentation ?

- En PYTHON, les matrices d'adjacence sont simplement représentées par des *matrices carrées* c.a.d. des tableaux à deux dimensions avec même nombre de lignes que de colonnes.
- A la place de 0 et de 1, on peut utiliser des bouléens.
- Implicitement on considère que les sommets sont des nombres. Ou alors on dispose d'un tableau de correspondance entre les sommets et leurs numéros (utile si les sommets contiennent des informations).
- Avec un tel choix :
  - il est facile de supprimer ou d'ajouter un arc entre deux sommets existants.
  - On teste en $O(1)$ si deux sommets sont voisins.

Matrices d'adjacence : quelle représentation ?

- En Python, les matrices d'adjacence sont simplement représentées par des *matrices carrées* c.a.d. des tableaux à deux dimensions avec même nombre de lignes que de colonnes.
- A la place de 0 et de 1, on peut utiliser des bouléens.
- Implicitement on considère que les sommets sont des nombres. Ou alors on dispose d'un tableau de correspondance entre les sommets et leurs numéros (utile si les sommets contiennent des informations).
- Avec un tel choix :
  - il est facile de supprimer ou d'ajouter un arc entre deux sommets existants.
  - On teste en $O(1)$ si deux sommets sont voisins.
  - Ajouter un sommet nécessite en général une copie de la matrice (complexité quadratique).

Matrices d'adjacence : quelle représentation ?

- En PYTHON, les matrices d'adjacence sont simplement représentées par des *matrices carrées* c.a.d. des tableaux à deux dimensions avec même nombre de lignes que de colonnes.
- A la place de 0 et de 1, on peut utiliser des bouléens.
- Implicitement on considère que les sommets sont des nombres. Ou alors on dispose d'un tableau de correspondance entre les sommets et leurs numéros (utile si les sommets contiennent des informations).
- Avec un tel choix :
  - il est facile de supprimer ou d'ajouter un arc entre deux sommets existants.
  - On teste en $O(1)$ si deux sommets sont voisins.
  - Ajouter un sommet nécessite en général une copie de la matrice (complexité quadratique).
  - Place mémoire perdue importante si beaucoup de sommets et matrice creuse.

Chaînes et Chemins

Soit $G = (S, E)$ un graphe orienté ou non.

- Un *chemin* d'un sommet x à un sommet y est une séquence de (au moins 2) sommets $x = x_0, x_1 \dots, x_{n-1}, x_n = y$ dans laquelle chaque x_i admet x_{i+1} pour voisin.

Chaînes et Chemins

Soit $G = (S, E)$ un graphe orienté ou non.

- Un *chemin* d'un sommet x à un sommet y est une séquence de (au moins 2) sommets $x = x_0, x_1 \ldots, x_{n-1}, x_n = y$ dans laquelle chaque x_i admet x_{i+1} pour voisin.
- Un sommet y est *accessible* depuis x s'il existe un chemin de x à y.

Chaînes et Chemins

Soit $G = (S, E)$ un graphe orienté ou non.

- Un *chemin* d'un sommet x à un sommet y est une séquence de (au moins 2) sommets $x = x_0, x_1 \ldots, x_{n-1}, x_n = y$ dans laquelle chaque x_i admet x_{i+1} pour voisin.
- Un sommet y est *accessible* depuis x s'il existe un chemin de x à y.
- La *longueur* d'un chemin est égale au nombre d'arêtes qui la constituent.

Chaînes et Chemins

Soit $G = (S, E)$ un graphe orienté ou non.

- Un *chemin* d'un sommet x à un sommet y est une séquence de (au moins 2) sommets $x = x_0, x_1 \ldots, x_{n-1}, x_n = y$ dans laquelle chaque x_i admet x_{i+1} pour voisin.
- Un sommet y est *accessible* depuis x s'il existe un chemin de x à y.
- La *longueur* d'un chemin est égale au nombre d'arêtes qui la constituent.
- Un *chemin simple* est un chemin qui ne contient pas plusieurs fois une même arête/arc (on dit *eulérien* s'il emprunte toutes les arêtes).

Chaînes et Chemins

Soit $G = (S, E)$ un graphe orienté ou non.

- Un *chemin* d'un sommet x à un sommet y est une séquence de (au moins 2) sommets $x = x_0, x_1 \dots, x_{n-1}, x_n = y$ dans laquelle chaque x_i admet x_{i+1} pour voisin.
- Un sommet y est *accessible* depuis x s'il existe un chemin de x à y.
- La *longueur* d'un chemin est égale au nombre d'arêtes qui la constituent.
- Un *chemin simple* est un chemin qui ne contient pas plusieurs fois une même arête/arc (on dit *eulérien* s'il emprunte toutes les arêtes).
- Un *chemin élémentaire* est un chemin qui ne passe pas plusieurs fois par un même sommet.

Chaînes et Chemins

Soit $G = (S, E)$ un graphe orienté ou non.

- Un *chemin* d'un sommet x à un sommet y est une séquence de (au moins 2) sommets $x = x_0, x_1 \dots, x_{n-1}, x_n = y$ dans laquelle chaque x_i admet x_{i+1} pour voisin.
- Un sommet y est *accessible* depuis x s'il existe un chemin de x à y.
- La *longueur* d'un chemin est égale au nombre d'arêtes qui la constituent.
- Un *chemin simple* est un chemin qui ne contient pas plusieurs fois une même arête/arc (on dit *eulérien* s'il emprunte toutes les arêtes).
- Un *chemin élémentaire* est un chemin qui ne passe pas plusieurs fois par un même sommet.
- élémentaire $\implies$ simple.

Chaînes et Chemins

Soit $G = (S, E)$ un graphe orienté ou non.

- Un *chemin* d'un sommet x à un sommet y est une séquence de (au moins 2) sommets $x = x_0, x_1 \ldots, x_{n-1}, x_n = y$ dans laquelle chaque x_i admet x_{i+1} pour voisin.
- Un sommet y est *accessible* depuis x s'il existe un chemin de x à y.
- La *longueur* d'un chemin est égale au nombre d'arêtes qui la constituent.
- Un *chemin simple* est un chemin qui ne contient pas plusieurs fois une même arête/arc (on dit *eulérien* s'il emprunte toutes les arêtes).
- Un *chemin élémentaire* est un chemin qui ne passe pas plusieurs fois par un même sommet.
- élémentaire $\implies$ simple.
- En CPGE, les chemins sont souvent élémentaires (pas de doublon de sommet sauf pour définir les cycles).

Chaînes et Chemins

Soit $G = (S, E)$ un graphe orienté ou non.

- Un *chemin* d'un sommet x à un sommet y est une séquence de (au moins 2) sommets $x = x_0, x_1 \ldots, x_{n-1}, x_n = y$ dans laquelle chaque x_i admet x_{i+1} pour voisin.
- Un sommet y est *accessible* depuis x s'il existe un chemin de x à y.
- La *longueur* d'un chemin est égale au nombre d'arêtes qui la constituent.
- Un *chemin simple* est un chemin qui ne contient pas plusieurs fois une même arête/arc (on dit *eulérien* s'il emprunte toutes les arêtes).
- Un *chemin élémentaire* est un chemin qui ne passe pas plusieurs fois par un même sommet.
- élémentaire $\implies$ simple.
- En CPGE, les chemins sont souvent élémentaires (pas de doublon de sommet sauf pour définir les cycles).
- Certains auteurs utilisent le mot *chaîne* pour désigner les chemins dans les graphes non orientés.

Cycles

- Un *cycle* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ est un chemin dont les extrémités sont confondues et qui ne passe pas deux fois de suite par la même arête.

Cycles

- Un *cycle* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ est un chemin dont les extrémités sont confondues et qui ne passe pas deux fois de suite par la même arête.
- Un cycle est dit *élémentaire* si, lorsqu'on enlève un arc quelconque, le chemin restant est élémentaire.

Cycles

- Un *cycle* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ est un chemin dont les extrémités sont confondues et qui ne passe pas deux fois de suite par la même arête.
- Un cycle est dit *élémentaire* si, lorsqu'on enlève un arc quelconque, le chemin restant est élémentaire.
- Un graphe est *acyclique* s'il ne possède aucun cycle.

Cycles

- Un *cycle* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ est un chemin dont les extrémités sont confondues et qui ne passe pas deux fois de suite par la même arête.
- Un cycle est dit *élémentaire* si, lorsqu'on enlève un arc quelconque, le chemin restant est élémentaire.
- Un graphe est *acyclique* s'il ne possède aucun cycle.
- Certains auteurs distinguent la notion de *circuit* (pour les graphes orientés) de celle de *cycle* (pour les graphes non orientés)

Exemples

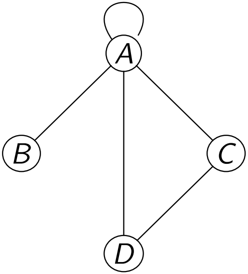


FIGURE – Un graphe non orienté

- A, A, C, D, A, B, A est un chemin mais pas un cycle.

Exemples

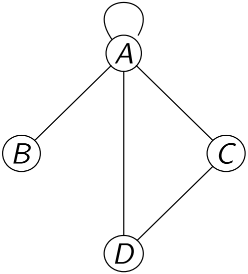


FIGURE – Un graphe non orienté

- A, A, C, D, A, B, A est un chemin mais pas un cycle.
- A, C, D, A est un cycle élémentaire. A, C, D, A, C, D, A est un cycle non simple.

Exemples

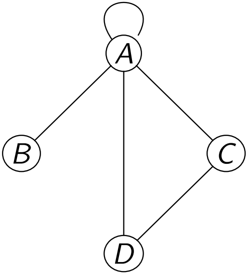


FIGURE – Un graphe non orienté

- A, A, C, D, A, B, A est un chemin mais pas un cycle.
- A, C, D, A est un cycle élémentaire. A, C, D, A, C, D, A est un cycle non simple.
- A, B, A n'est pas un cycle.

Exemples

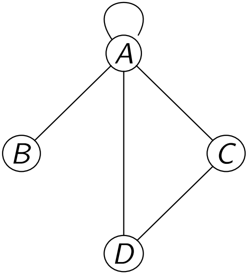


FIGURE – Un graphe non orienté

- A, A, C, D, A, B, A est un chemin mais pas un cycle.
- A, C, D, A est un cycle élémentaire. A, C, D, A, C, D, A est un cycle non simple.
- A, B, A n'est pas un cycle.
- A, A est un cycle ou non : ça dépend des auteurs !

Exemples

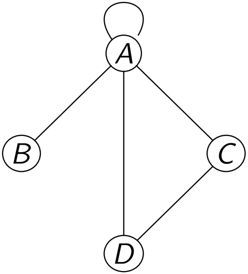


FIGURE – Un graphe non orienté

- A, A, C, D, A, B, A est un chemin mais pas un cycle.
- A, C, D, A est un cycle élémentaire. A, C, D, A, C, D, A est un cycle non simple.
- A, B, A n'est pas un cycle.
- A, A est un cycle ou non : ça dépend des auteurs !
- A, B, C n'est pas un chemin.

Distance

- La *distance* entre deux sommets x et y d'un graphe $G = (S, A)$ orienté (resp. non orienté) est notée $d_G(x, y)$ et est égale à la longueur *d'un* plus court chemin (resp. chaîne) allant de x à y s'il en existe un ou bien $+\infty$ sinon.

Distance

- La *distance* entre deux sommets x et y d'un graphe $G = (S, A)$ orienté (resp. non orienté) est notée $d_G(x, y)$ et est égale à la longueur *d'un* plus court chemin (resp. chaîne) allant de x à y s'il en existe un ou bien $+\infty$ sinon.
- Il s'agit bien d'une *distance* au sens mathématiques. En particulier, elle vérifie l'*inégalité triangulaire*
  $\forall (x, y, z) \in S^3,\ d_G(x, z) \leq d_G(x, y) + d_G(y, z)$.

Distance

- La *distance* entre deux sommets x et y d'un graphe $G = (S, A)$ orienté (resp. non orienté) est notée $d_G(x, y)$ et est égale à la longueur *d'un* plus court chemin (resp. chaîne) allant de x à y s'il en existe un ou bien $+\infty$ sinon.
- Il s'agit bien d'une *distance* au sens mathématiques. En particulier, elle vérifie l'*inégalité triangulaire* $\forall (x, y, z) \in S^3,\ d_G(x, z) \leq d_G(x, y) + d_G(y, z)$.
- Le *diamètre* d'un graphe G est la valeur : $\sup_{(x,y)\in S^2} d_G(x, y)$. C'est « la longueur du plus long plus court chemin entre deux sommets ».

Relation de connexité

- La *connexité* dans un graphe non orienté est une relation binaire entre deux sommets : x et y sont en relation de connexité si et seulement si y est accessible depuis x.

Relation de connexité

- La *connexité* dans un graphe non orienté est une relation binaire entre deux sommets : x et y sont en relation de connexité si et seulement si y est accessible depuis x.
- Comme le graphe est non orienté, si y est accessible depuis x, alors x est accessible depuis y.

Relation de connexité

- La *connexité* dans un graphe non orienté est une relation binaire entre deux sommets : x et y sont en relation de connexité si et seulement si y est accessible depuis x.
- Comme le graphe est non orienté, si y est accessible depuis x, alors x est accessible depuis y.
- La connexité est une relation d'équivalence.

Relation de connexité

- La *connexité* dans un graphe non orienté est une relation binaire entre deux sommets : x et y sont en relation de connexité si et seulement si y est accessible depuis x.
- Comme le graphe est non orienté, si y est accessible depuis x, alors x est accessible depuis y.
- La connexité est une relation d'équivalence.
- Les classes d'équivalences sont appelées *composantes connexes*. La composante connexe d'un sommet x est notée ici $\dot{x}$ et vaut :

$$\dot{x} = \{y \in V \mid \text{ il existe une chaîne de } x \text{ à } y\}.$$

Relation de connexité

- La *connexité* dans un graphe non orienté est une relation binaire entre deux sommets : x et y sont en relation de connexité si et seulement si y est accessible depuis x.
- Comme le graphe est non orienté, si y est accessible depuis x, alors x est accessible depuis y.
- La connexité est une relation d'équivalence.
- Les classes d'équivalences sont appelées *composantes connexes*. La composante connexe d'un sommet x est notée ici $\dot{x}$ et vaut :

$$\dot{x} = \{y \in V \mid \text{ il existe une chaîne de } x \text{ à } y\}\,.$$

- Un graphe est dit *connexe* si il possède une seule composante connexe.

Relation de connexité

- La *connexité* dans un graphe non orienté est une relation binaire entre deux sommets : x et y sont en relation de connexité si et seulement si y est accessible depuis x.
- Comme le graphe est non orienté, si y est accessible depuis x, alors x est accessible depuis y.
- La connexité est une relation d'équivalence.
- Les classes d'équivalences sont appelées *composantes connexes*. La composante connexe d'un sommet x est notée ici $\dot{x}$ et vaut :

$$\dot{x} = \{y \in V \mid \text{ il existe une chaîne de } x \text{ à } y\}.$$

- Un graphe est dit *connexe* si il possède une seule composante connexe.
- La connexité est étendue aux graphes orientés en ne tenant pas compte du sens des arcs.

Connexité : exemple

$$
\begin{tikzcd}
S_1 \arrow[d] \arrow[dr] & S_2 \arrow[l] \arrow[d] & S_3 \arrow[l] \arrow[dr] & S_4 \arrow[l] & S_{10} \arrow[lll, bend right] \arrow[dllll, bend left] \\
S_8 & S_7 \arrow[l] \arrow[r] & S_6 \arrow[ul] & S_5 \arrow[l] \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

- Graphe connexe (quand on ne considère pas le sens des flèches).

Connexité : exemple

$$
\begin{tikzcd}
S_1 \arrow[d] \arrow[dr] & S_2 \arrow[l] \arrow[d] & S_3 \arrow[l] \arrow[dr] & S_4 \arrow[l] & S_{10} \arrow[lll, bend right] \arrow[llll, bend left] \\
S_8 & S_7 \arrow[l] \arrow[r] & S_6 \arrow[ul] & S_5 \arrow[l] \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

- Graphe connexe (quand on ne considère pas le sens des flèches).
- S_8 est accessible depuis tous les sommets mais n'accèse à aucun.

Connexité : exemple

$$\begin{tikzcd}
S_1 \arrow[d] \arrow[dr] & S_2 \arrow[l] \arrow[d] & S_3 \arrow[l] \arrow[dr] & S_4 \arrow[l] & S_{10} \arrow[lll, bend right] \arrow[dllll, bend left] \\
S_8 & S_7 \arrow[l] \arrow[r] & S_6 \arrow[ul] & S_5 \arrow[l] \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

- Graphe connexe (quand on ne considère pas le sens des flèches).
- S_8 est accessible depuis tous les sommets mais n'accèse à aucun.
- Sommets accessibles depuis S_2 : $\{S_1, S_2, S_6, S_7, S_8\}$.

Connexité : exemple

$$\begin{tikzcd}
S_1 \arrow[d] \arrow[dr] & S_2 \arrow[l] \arrow[d] & S_3 \arrow[l] \arrow[dr] & S_4 \arrow[l] & S_{10} \arrow[lll, bend right] \arrow[dllll, bend left] \\
S_8 & S_7 \arrow[l] \arrow[r] & S_6 \arrow[ul] & S_5 \arrow[l] \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

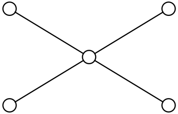
- Graphe connexe (quand on ne considère pas le sens des flèches).
- S_8 est accessible depuis tous les sommets mais n'accèse à aucun.
- Sommets accessibles depuis S_2 : $\{S_1, S_2, S_6, S_7, S_8\}$.
- Sommets coaccessibles depuis S_2 : $\{S_1, S_2, S_5, S_6, S_7, S_{10}\}$.

Statut de cette section

Cette section donne quelques exemples de graphes particuliers sans qu'aucune preuve ne soit donnée.

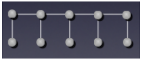
Étoiles, peignes, chenilles

Étoile : un arbre dont un sommet est adjacent à tous les autres.



Chenille : arbre tel que tout sommet de degré ≥ 2 est adjacent à au plus deux sommets de degré ≥ 2.

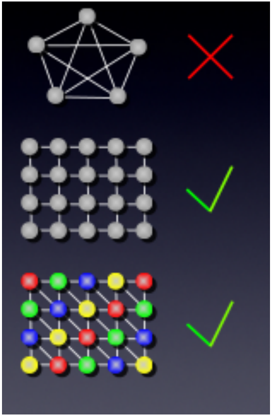
Peigne : chenille dont les sommets sont de degré 1 ou 3 sauf exactement deux sommets qui sont de degré 2.



Graphe planaire

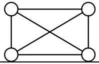
Un graphe est *planaire*
si on peut le dessiner sans
qu'aucune arête n'en coupe
une autre.

4-coloriabilité :
les sommets d'un graphe planaire
peuvent être coloriés
avec 4 couleurs sans
que deux sommets adjacents
ne soient de la même couleur.

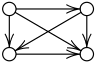


Graphe complet, tournoi

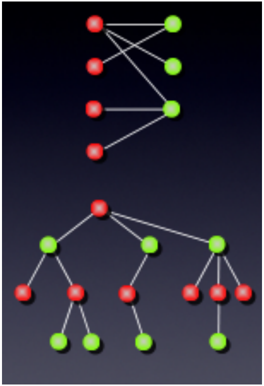
Un *graphe complet* est un graphe
non orienté où
tous les sommets sont deux à deux adjacents.



Un *tournoi* est un graphe orienté
obtenu à partir d'un graphe complet
en orientant chaque arête.



Graphe biparti



Un graphe *biparti* $G = (S, A)$
est un graphe non orienté
admettant une partition $\{P_1, P_2\}$
de ses sommets telle que
$\{x, y\} \in A \implies (x, y) \in P_1 \times P_2 \cup P_2 \times P_1$

Les arbres (et plus généralement les forêts)
sont des graphes bipartis.

Graphe biparti complet

Un graphe est dit *biparti complet* (ou encore est appelé une *biclique*) s'il est biparti et contient le nombre maximal d'arêtes.
Si U est de cardinal m et V est de cardinal n le graphe biparti complet est noté $K_{m,n}$.

Figure – Exemples de graphes bipartis complets