Jeux d'accessibilité à deux joueurs

Lycée Thiers

Crédits

- Wikipedia : Théorie des jeux

Crédits

- Wikipedia : Théorie des jeux
- Informatique Tronc Commun (Serge Bays - Ellipse)

Historique

- Objectif : étude de stratégies et équilibres dans un jeu à 2 joueurs.

Historique

- Objectif : étude de stratégies et équilibres dans un jeu à 2 joueurs.
- L'ouvrage ≪ Theory of Games and Economic Behavior ≫ d'Oskar Morgenstern et John von Neumann paru en 1944 est considéré comme le fondement de la théorie des jeux moderne.

Historique

- Objectif : étude de stratégies et équilibres dans un jeu à 2 joueurs.
- L'ouvrage « Theory of Games and Economic Behavior » d'Oskar Morgenstern et John von Neumann paru en 1944 est considéré comme le fondement de la théorie des jeux moderne.
- Depuis 1944, 11 prix Nobel d'économie ont été décernés à des économistes pour leurs recherches sur la théorie des jeux (Wikipedia).

Historique

- Objectif : étude de stratégies et équilibres dans un jeu à 2 joueurs.
- L'ouvrage « Theory of Games and Economic Behavior » d'Oskar Morgenstern et John von Neumann paru en 1944 est considéré comme le fondement de la théorie des jeux moderne.
- Depuis 1944, 11 prix Nobel d'économie ont été décernés à des économistes pour leurs recherches sur la théorie des jeux (Wikipedia).
- Autres applications :

Historique

- Objectif : étude de stratégies et équilibres dans un jeu à 2 joueurs.
- L'ouvrage « Theory of Games and Economic Behavior » d'Oskar Morgenstern et John von Neumann paru en 1944 est considéré comme le fondement de la théorie des jeux moderne.
- Depuis 1944, 11 prix Nobel d'économie ont été décernés à des économistes pour leurs recherches sur la théorie des jeux (Wikipedia).
- Autres applications :
    - sciences sociales,

Historique

- Objectif : étude de stratégies et équilibres dans un jeu à 2 joueurs.
- L'ouvrage ≪ Theory of Games and Economic Behavior ≫ d'Oskar Morgenstern et John von Neumann paru en 1944 est considéré comme le fondement de la théorie des jeux moderne.
- Depuis 1944, 11 prix Nobel d'économie ont été décernés à des économistes pour leurs recherches sur la théorie des jeux (Wikipedia).
- Autres applications :
  - sciences sociales,
  - les sciences politiques,

Historique

- Objectif : étude de stratégies et équilibres dans un jeu à 2 joueurs.
- L'ouvrage « Theory of Games and Economic Behavior » d'Oskar Morgenstern et John von Neumann paru en 1944 est considéré comme le fondement de la théorie des jeux moderne.
- Depuis 1944, 11 prix Nobel d'économie ont été décernés à des économistes pour leurs recherches sur la théorie des jeux (Wikipedia).
- Autres applications :
    - sciences sociales,
    - les sciences politiques,
    - analyse stratégique (comme en relations internationales)

Historique

- Objectif : étude de stratégies et équilibres dans un jeu à 2 joueurs.
- L'ouvrage « Theory of Games and Economic Behavior » d'Oskar Morgenstern et John von Neumann paru en 1944 est considéré comme le fondement de la théorie des jeux moderne.
- Depuis 1944, 11 prix Nobel d'économie ont été décernés à des économistes pour leurs recherches sur la théorie des jeux (Wikipedia).
- Autres applications :
  - sciences sociales,
  - les sciences politiques,
  - analyse stratégique (comme en relations internationales)
  - théorie des organisations

Historique

- Objectif : étude de stratégies et équilibres dans un jeu à 2 joueurs.
- L'ouvrage « Theory of Games and Economic Behavior » d'Oskar Morgenstern et John von Neumann paru en 1944 est considéré comme le fondement de la théorie des jeux moderne.
- Depuis 1944, 11 prix Nobel d'économie ont été décernés à des économistes pour leurs recherches sur la théorie des jeux (Wikipedia).
- Autres applications :
  - sciences sociales,
  - les sciences politiques,
  - analyse stratégique (comme en relations internationales)
  - théorie des organisations
  - biologie évolutionniste.

1. Jeux à 2 joueurs

2. Algorithme min-max

Jeux à 2 joueurs

On se limite à l'étude aux jeux à 2 joueurs dans lesquels

- 2 joueurs prennent à tour de rôle une décision (Exit le *Pierre-feuille-ciseaux* où la décision est simultanée).

Jeux à 2 joueurs

On se limite à l'étude aux jeux à 2 joueurs dans lesquels

- 2 joueurs prennent à tour de rôle une décision (Exit le *Pierre-feuille-ciseaux* où la décision est simultanée).
- Il y a un ensemble fini de décisions possibles (exemple : dames, échecs, Go...).

Jeux à 2 joueurs

On se limite à l'étude aux jeux à 2 joueurs dans lesquels

- 2 joueurs prennent à tour de rôle une décision (Exit le *Pierre-feuille-ciseaux* où la décision est simultanée).
- Il y a un ensemble fini de décisions possibles (exemple : dames, échecs, Go...).
- Chaque décision amène à une nouvelle situation (on ne peut pas décider de ne pas jouer).

Jeux à 2 joueurs

On se limite à l'étude aux jeux à 2 joueurs dans lesquels

- 2 joueurs prennent à tour de rôle une décision (Exit le *Pierre-feuille-ciseaux* où la décision est simultanée).
- Il y a un ensemble fini de décisions possibles (exemple : dames, échecs, Go...).
- Chaque décision amène à une nouvelle situation (on ne peut pas décider de ne pas jouer).
- Les 2 joueurs ont la même vue d'ensemble de la situation (jeu à *information complète*). Exit le poker.

Jeux à 2 joueurs

On se limite à l'étude aux jeux à 2 joueurs dans lesquels

- 2 joueurs prennent à tour de rôle une décision (Exit le *Pierre-feuille-ciseaux* où la décision est simultanée).
- Il y a un ensemble fini de décisions possibles (exemple : dames, échecs, Go...).
- Chaque décision amène à une nouvelle situation (on ne peut pas décider de ne pas jouer).
- Les 2 joueurs ont la même vue d'ensemble de la situation (jeu à *information complète*). Exit le poker.
- Une décision est prise en fonction de la situation présente et non des situations passées (jeu *sans mémoire*).

Jeux à 2 joueurs

On se limite à l'étude aux jeux à 2 joueurs dans lesquels

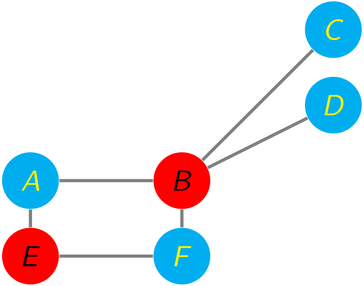
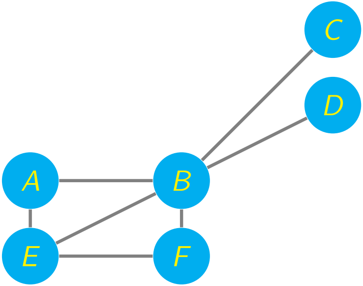
- 2 joueurs prennent à tour de rôle une décision (Exit le *Pierre-feuille-ciseaux* où la décision est simultanée).
- Il y a un ensemble fini de décisions possibles (exemple : dames, échecs, Go...).
- Chaque décision amène à une nouvelle situation (on ne peut pas décider de ne pas jouer).
- Les 2 joueurs ont la même vue d'ensemble de la situation (jeu à *information complète*). Exit le poker.
- Une décision est prise en fonction de la situation présente et non des situations passées (jeu *sans mémoire*).
- Dans une situation donnée, une décision amène toujours à la même situation (jeu *sans hasard*).

Graphe biparti

- Un graphe orienté ou non orienté $G = (S, A)$ est dit *biparti* si il existe une partition $\{S_1, S_2\}$ de S tel que les extrémités de tout arc sont dans deux éléments différents de la partition.

Graphe biparti

- Un graphe orienté ou non orienté $G = (S, A)$ est dit *biparti* si il existe une partition $\{S_1, S_2\}$ de S tel que les extrémités de tout arc sont dans deux éléments différents de la partition.
- Observer que la présence d'un cycle *impair* (nombre impair d'arcs) empêche un graphe d'être biparti.

Un graphe biparti	Non biparti
	

$S_1 = \{A, C, D, F\}\,;\, S_2 = \{E, B\}$

$S_1 \cup S_2 = S; S_1 \cap S_2 = \emptyset$

Représentation

Les deux joueurs sont notés J_1 et J_2.

- Les jeux sont modélisés par des graphes orientés (finis) et bipartis.

Représentation

Les deux joueurs sont notés J_1 et J_2.

- Les jeux sont modélisés par des graphes orientés (finis) et bipartis.
- Une *situation* (on dit aussi *position* ou *état*) est un sommet du graphe.

Représentation

Les deux joueurs sont notés J_1 et J_2.

- Les jeux sont modélisés par des graphes orientés (finis) et bipartis.
- Une *situation* (on dit aussi *position* ou *état*) est un sommet du graphe.
- Un arc représente un *coup possible*.

Représentation

Les deux joueurs sont notés J_1 et J_2.

- Les jeux sont modélisés par des graphes orientés (finis) et bipartis.
- Une *situation* (on dit aussi *position* ou *état*) est un sommet du graphe.
- Un arc représente un *coup possible*.
- Une *décision* est le choix d'un arc amenant à une nouvelle position.

Représentation

Les deux joueurs sont notés J_1 et J_2.

- Les jeux sont modélisés par des graphes orientés (finis) et bipartis.
- Une *situation* (on dit aussi *position* ou *état*) est un sommet du graphe.
- Un arc représente un *coup possible*.
- Une *décision* est le choix d'un arc amenant à une nouvelle position.
- Un jeu est dit *à somme nulle* si toute partie gagnée par un joueur est perdue pour l'autre (pas de match nul).

Arène

Soient J_1, J_2 deux joueurs.

- On appelle *arène* un triplet $\mathcal{G} = (G, S_1, S_2)$ tel que :

Les sommets de S_i sont dits *contrôlés par le joueur J_i*.

Arène

Soient J_1, J_2 deux joueurs.

- On appelle *arène* un triplet $\mathcal{G} = (G, S_1, S_2)$ tel que :
  - $G = (S, A)$ est un graphe orienté biparti,

Les sommets de S_i sont dits *contrôlés par le joueur J_i*.

Arène

Soient J_1, J_2 deux joueurs.

- On appelle *arène* un triplet $\mathcal{G} = (G, S_1, S_2)$ tel que :
  - $G = (S, A)$ est un graphe orienté biparti,
  - (S_1, S_2) est une partition de S ET les arcs vont uniquement de S_1 vers S_2 ou de S_2 vers S_1.

  Les sommets de S_i sont dits *contrôlés par le joueur* J_i.

Arène

Soient J_1, J_2 deux joueurs.

- On appelle *arène* un triplet $\mathcal{G} = (G, S_1, S_2)$ tel que :
  - $G = (S, A)$ est un graphe orienté biparti,
  - (S_1, S_2) est une partition de S ET les arcs vont uniquement de S_1 vers S_2 ou de S_2 vers S_1.

  Les sommets de S_i sont dits *contrôlés par le joueur J_i*.
- Un arc part toujours d'un sommet contrôlé par un joueur pour atteindre un sommet contrôlé par l'autre joueur.

Arène

Soient J_1, J_2 deux joueurs.

- On appelle *arène* un triplet $\mathcal{G} = (G, S_1, S_2)$ tel que :
  - $G = (S, A)$ est un graphe orienté biparti,
  - (S_1, S_2) est une partition de S ET les arcs vont uniquement de S_1 vers S_2 ou de S_2 vers S_1.

  Les sommets de S_i sont dits *contrôlés par le joueur* J_i.
- Un arc part toujours d'un sommet contrôlé par un joueur pour atteindre un sommet contrôlé par l'autre joueur.
- Pour des raisons de commodité, les sommets sont souvent notés $0, 1, 2, \ldots$.

État terminal

- Un sommet sans arc sortant est un *état terminal* du jeu.

État terminal

- Un sommet sans arc sortant est un *état terminal* du jeu.
- Les états terminaux sont, de façon disjointe, des états gagnants pour J_1, des états gagnants pour J_2 ou des états de match nul.

État terminal

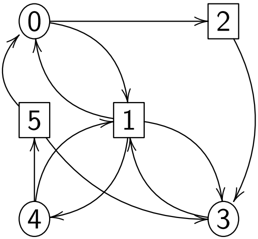
- Un sommet sans arc sortant est un *état terminal* du jeu.
- Les états terminaux sont, de façon disjointe, des états gagnants pour J_1, des états gagnants pour J_2 ou des états de match nul.
- Une *partie* est un chemin (fini) depuis un ceratin état, appelé *état initial* vers un état terminal.

État terminal

- Un sommet sans arc sortant est un *état terminal* du jeu.
- Les états terminaux sont, de façon disjointe, des états gagnants pour J_1, des états gagnants pour J_2 ou des états de match nul.
- Une *partie* est un chemin (fini) depuis un ceratin état, appelé *état initial* vers un état terminal.
- Une partie est modélisée ainsi : on place un jeton sur un sommet (ce qui revient à considérer une situation de départ). Le joueur qui contrôle ce sommet, prend une décision (donc emprunte un arc) ce qui revient à placer le jeton sur un voisin de la situation initiale (donc contrôlé par l'autre joueur) etc.

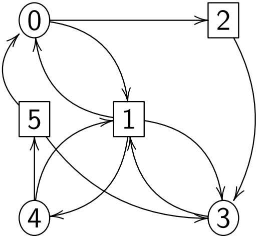
Représentation

- Puisque le graphe est biparti, il faut deux symboles pour représenter les sommets associés aux joueurs. Ex : cercles pour J_1, carrés pour J_2



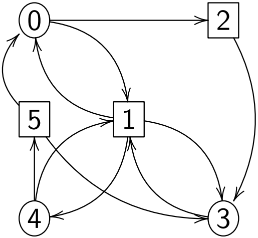
Représentation

- Puisque le graphe est biparti, il faut deux symboles pour représenter les sommets associés aux joueurs. Ex : cercles pour J_1, carrés pour J_2
- Un jeton est déposé sur le sommet 0. C'est donc J_1 qui commence la partie : il peut se rendre en 1 ou 2. C'est alors à J_2 de jouer.



Représentation

- Puisque le graphe est biparti, il faut deux symboles pour représenter les sommets associés aux joueurs. Ex : cercles pour J_1, carrés pour J_2
- Un jeton est déposé sur le sommet 0. C'est donc J_1 qui commence la partie : il peut se rendre en 1 ou 2. C'est alors à J_2 de jouer.
- Exemple de partie : 0 1 3 1 4 1 3 1 4...



Exemples

- Jeu de Nim, variante à un tas : on considère un tas d'objets. Chaque joueur peut retirer 1, 2 ou 3 objets du tas. Le dernier qui retire un objet gagne la partie. Il n'y a pas de partie nulle.
  Remarque : la *stratégie* qui permet à J_1 de gagner la partie est de laisser à J_2 un multiple de 4 objets à chaque tour.

Exemples

- Jeu de Nim, variante à un tas : on considère un tas d'objets. Chaque joueur peut retirer 1, 2 ou 3 objets du tas. Le dernier qui retire un objet gagne la partie. Il n'y a pas de partie nulle.
  Remarque : la *stratégie* qui permet à J_1 de gagner la partie est de laisser à J_2 un multiple de 4 objets à chaque tour.
- Jeu de Marienbad : il y a 4 tas constitués de 1,3,5,7 allumettes. Chaque joueur peut retirer à chaque tour autant d'allumettes qu'il veut, au moins une, mais dans un seul tas. Le joueur qui prend en dernier perd la partie.

Exemples

- Jeu de Nim, variante à un tas : on considère un tas d'objets. Chaque joueur peut retirer 1, 2 ou 3 objets du tas. Le dernier qui retire un objet gagne la partie. Il n'y a pas de partie nulle.
  Remarque : la *stratégie* qui permet à J_1 de gagner la partie est de laisser à J_2 un multiple de 4 objets à chaque tour.
- Jeu de Marienbad : il y a 4 tas constitués de 1,3,5,7 allumettes. Chaque joueur peut retirer à chaque tour autant d'allumettes qu'il veut, au moins une, mais dans un seul tas. Le joueur qui prend en dernier perd la partie.
- Jeu de morpion : dans une grille de 9×9 cases, chaque joueur trace son symbole (x ou o) dans une seule case. Le gagnant est celui qui trace 3 symboles identiques verticalement, horizontalement ou diagonalement.

Notion de stratégie

Soit $G = (S, A)$ un graphe et (G, S_1, S_2) une arène.

- Une *stratégie* pour le joueur J_i est une fonction $f_i : S \to S$ telle que, dans tout état non terminal $e \in S_i$ (contrôlé par J_i), le coup joué est $f_i(e)$, avec $e \to f(e)$ un arc de A.

Notion de stratégie

Soit $G = (S, A)$ un graphe et (G, S_1, S_2) une arène.

- Une *stratégie* pour le joueur J_i est une fonction $f_i : S \to S$ telle que, dans tout état non terminal $e \in S_i$ (contrôlé par J_i), le coup joué est $f_i(e)$, avec $e \to f(e)$ un arc de A.
- La stratégie ne prenant que e en argument, on parle de *jeu sans mémoire*.

Notion de stratégie

Soit $G = (S, A)$ un graphe et (G, S_1, S_2) une arène.

- Une *stratégie* pour le joueur J_i est une fonction $f_i : S \to S$ telle que, dans tout état non terminal $e \in S_i$ (contrôlé par J_i), le coup joué est $f_i(e)$, avec $e \to f(e)$ un arc de A.
- La stratégie ne prenant que e en argument, on parle de *jeu sans mémoire*.
- Étant donné un sommet de départ, une stratégie est dite *gagnante* si, quel que soit la jeu de l'adversaire, toute partie définie par f_i conduit à la victoire du joueur J_i.

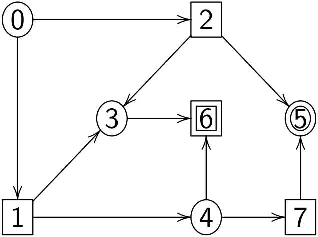
Notion de stratégie

Soit $G = (S, A)$ un graphe et (G, S_1, S_2) une arène.

- Une *stratégie* pour le joueur J_i est une fonction $f_i : S \to S$ telle que, dans tout état non terminal $e \in S_i$ (contrôlé par J_i), le coup joué est $f_i(e)$, avec $e \to f(e)$ un arc de A.
- La stratégie ne prenant que e en argument, on parle de *jeu sans mémoire*.
- Étant donné un sommet de départ, une stratégie est dite *gagnante* si, quel que soit la jeu de l'adversaire, toute partie définie par f_i conduit à la victoire du joueur J_i.
- Un état du jeu est appelé une *position gagnante pour* J_i s'il existe une stratégie gagnante en prenant cet état comme état initial.

Exemple de stratégie

Sommet contrôlé par J_1 : cercles ; par J_2 : carrés. $F_1 = \{6\}$; $F_2 = \{5\}$.
Sommet de départ S_0.

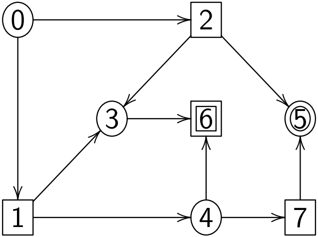


Appelons « SansIntérêt » le jeu associé à ce graphe.

- Une stratégie gagnante pour J_1 est de déplacer le jeton en $\boxed{1}$. J_2 n'a pas d'autre choix que d'aller en 3 ou 4 d'où J_1 peut toujours se rendre en $\boxed{6}$ qui est gagnant pour J_1.

Exemple de stratégie

Sommet contrôlé par J_1 : cercles ; par J_2 : carrés. $F_1 = \{6\}$; $F_2 = \{5\}$.
Sommet de départ S_0.

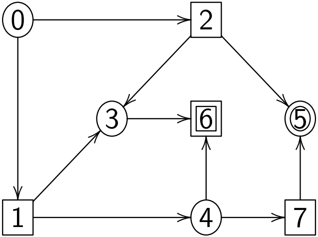


Appelons « SansIntérêt » le jeu associé à ce graphe.

- Une stratégie gagnante pour J_1 est de déplacer le jeton en $\boxed{1}$. J_2 n'a pas d'autre choix que d'aller en 3 ou 4 d'où J_1 peut toujours se rendre en $\boxed{6}$ qui est gagnant pour J_1.
- Il y a une stratégie gagnante pour J_2 à partir de $\boxed{2}$.

Exemple de stratégie

Sommet contrôlé par J_1 : cercles ; par J_2 : carrés. $F_1 = \{6\}$; $F_2 = \{5\}$.
Sommet de départ S_0.



Appelons « SansIntérêt » le jeu associé à ce graphe.

- Une stratégie gagnante pour J_1 est de déplacer le jeton en $\boxed{1}$. J_2 n'a pas d'autre choix que d'aller en 3 ou 4 d'où J_1 peut toujours se rendre en $\boxed{6}$ qui est gagnant pour J_1.
- Il y a une stratégie gagnante pour J_2 à partir de $\boxed{2}$.
- Rqe : certains jeux ont plusieurs sommets de départ possibles.

Jeu déterminé

- On note $S_\emptyset$ l'ensemble des sommets pour lesquels aucun joueur n'a de stratégie gagnante.

Jeu déterminé

- On note $S_\emptyset$ l'ensemble des sommets pour lesquels aucun joueur n'a de stratégie gagnante.
- On dit qu'un jeu est *déterminé* si l'ensemble $S_\emptyset$ est vide. Exemple : le jeu SansIntérêt car J_1 dispose d'une stratégie gagnante (depuis le sommet de départ).

Notion d'attracteur dans un jeu d'accessibilité

Construction des sommets gagnants en au plus un coup

Soit un jeu d'accessibilité $(G = (S, A), S_1, S_2)$ avec F_1 les états gagnants pour J_1. On veut construire l'ensemble des sommets pour lesquels il existe une stratégie gagnante pour J_1.

- Si le sommet de départ est dans F_1, J_1 a gagné la partie. (Attention, les sommets de F_1 peuvent être dans S_1 ou S_2).

Notion d'attracteur dans un jeu d'accessibilité

Construction des sommets gagnants en au plus un coup

Soit un jeu d'accessibilité $(G = (S, A), S_1, S_2)$ avec F_1 les états gagnants pour J_1. On veut construire l'ensemble des sommets pour lesquels il existe une stratégie gagnante pour J_1.

- Si le sommet de départ est dans F_1, J_1 a gagné la partie. (Attention, les sommets de F_1 peuvent être dans S_1 ou S_2).
- Tout sommet de S_1 ayant un arc qui pointe sur un sommet de F_1 est gagnant en un coup pour J_1 (car J_1 peut amener le jeu dans une configuration gagnante pour lui). Exemple, le sommet 4 dans le jeu SansIntérêt.

Notion d'attracteur dans un jeu d'accessibilité

Construction des sommets gagnants en au plus un coup

Soit un jeu d'accessibilité $(G = (S, A), S_1, S_2)$ avec F_1 les états gagnants pour J_1. On veut construire l'ensemble des sommets pour lesquels il existe une stratégie gagnante pour J_1.

- Si le sommet de départ est dans F_1, J_1 a gagné la partie. (Attention, les sommets de F_1 peuvent être dans S_1 ou S_2).
- Tout sommet de S_1 ayant un arc qui pointe sur un sommet de F_1 est gagnant en un coup pour J_1 (car J_1 peut amener le jeu dans une configuration gagnante pour lui). Exemple, le sommet 4 dans le jeu SansIntérêt.
- Tout sommet de S_2 dont tous les arcs pointent vers un sommet de F_1 est gagnant en un coup pour J_1 (car J_2 est contraint d'amener le jeu dans une configuration gagnante pour J_1).
  Pas d'exemple dans le jeu SansIntérêt.

Notion d'attracteur dans un jeu d'accessibilité

Construction des sommets gagnants en au plus un coup

Soit un jeu d'accessibilité $(G = (S, A), S_1, S_2)$ avec F_1 les états gagnants pour J_1. On veut construire l'ensemble des sommets pour lesquels il existe une stratégie gagnante pour J_1.

- Si le sommet de départ est dans F_1, J_1 a gagné la partie. (Attention, les sommets de F_1 peuvent être dans S_1 ou S_2).
- Tout sommet de S_1 ayant un arc qui pointe sur un sommet de F_1 est gagnant en un coup pour J_1 (car J_1 peut amener le jeu dans une configuration gagnante pour lui). Exemple, le sommet 4 dans le jeu SansIntérêt.
- Tout sommet de S_2 dont tous les arcs pointent vers un sommet de F_1 est gagnant en un coup pour J_1 (car J_2 est contraint d'amener le jeu dans une configuration gagnante pour J_1).
  Pas d'exemple dans le jeu SansIntérêt.
- On a ainsi construit l'ensemble des sommets gagnants pour J_1 en au plus un coup. On généralise dans le transparent suivant.

Notion d'attracteur dans un jeu d'accessibilité

Construction des sommets gagnants

Soit un jeu d'accessibilité $(G = (S, A), S_1, S_2)$ avec F_1 les états gagnants pour J_1. On construit la suite $(A_i(F_1))_{i\in\mathbb{N}}$ telle que :

- $A_0(F_1) = F_1$ (ensemble des sommets gagnants pour J_1 en 0 coup)

Notion d'attracteur dans un jeu d'accessibilité

Construction des sommets gagnants

Soit un jeu d'accessibilité $(G = (S, A), S_1, S_2)$ avec F_1 les états gagnants pour J_1. On construit la suite $(A_i(F_1))_{i\in\mathbb{N}}$ telle que :

- $A_0(F_1) = F_1$ (ensemble des sommets gagnants pour J_1 en 0 coup)
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1}(F_1) = A_n(F) \cup B_n^1 \cup C_n^1$ où

Notion d'attracteur dans un jeu d'accessibilité

Construction des sommets gagnants

Soit un jeu d'accessibilité $(G = (S, A), S_1, S_2)$ avec F_1 les états gagnants pour J_1. On construit la suite $(A_i(F_1))_{i\in\mathbb{N}}$ telle que :

- $A_0(F_1) = F_1$ (ensemble des sommets gagnants pour J_1 en 0 coup)
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1}(F_1) = A_n(F) \cup B_n^1 \cup C_n^1$ où
  - $B_n^1 = \{s \in S_1 \mid \exists (s, s') \in A,\ s' \in A_n(F_1)\}$: ensemble des sommets de S_1 qui ont un voisin dans $A_n(F_1)$

Notion d'attracteur dans un jeu d'accessibilité

Construction des sommets gagnants

Soit un jeu d'accessibilité $(G = (S, A), S_1, S_2)$ avec F_1 les états gagnants pour J_1. On construit la suite $(A_i(F_1))_{i \in \mathbb{N}}$ telle que :

- $A_0(F_1) = F_1$ (ensemble des sommets gagnants pour J_1 en 0 coup)
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1}(F_1) = A_n(F) \cup B_n^1 \cup C_n^1$ où
  - $B_n^1 = \{s \in S_1 \mid \exists (s, s') \in A,\ s' \in A_n(F_1)\}$: ensemble des sommets de S_1 qui ont un voisin dans $A_n(F_1)$
  - $C_n^1 = \{s \in S_2 \mid \forall (s, s') \in A,\ s' \in A_n(F_1)\}$: ensemble des sommets de S_2 dont tous les voisins sont dans $A_n(F_1)$.

Notion d'attracteur dans un jeu d'accessibilité

Construction des sommets gagnants

Soit un jeu d'accessibilité $(G = (S, A), S_1, S_2)$ avec F_1 les états gagnants pour J_1. On construit la suite $(A_i(F_1))_{i \in \mathbb{N}}$ telle que :

- $A_0(F_1) = F_1$ (ensemble des sommets gagnants pour J_1 en 0 coup)
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1}(F_1) = A_n(F) \cup B_n^1 \cup C_n^1$ où
  - $B_n^1 = \{s \in S_1 \mid \exists (s, s') \in A,\ s' \in A_n(F_1)\}$: ensemble des sommets de S_1 qui ont un voisin dans $A_n(F_1)$
  - $C_n^1 = \{s \in S_2 \mid \forall (s, s') \in A,\ s' \in A_n(F_1)\}$: ensemble des sommets de S_2 dont tous les voisins sont dans $A_n(F_1)$.
- $A_n(F_1)$ est l'ensemble des sommets gagnants en au plus n coups pour J_1.

Notion d'attracteur dans un jeu d'accessibilité

Attracteur

- Cette suite d'ensembles est évidemment croissante. Comme le nombre de sommets est fini, la suite est stationnaire à partir d'un certain rang.

Notion d'attracteur dans un jeu d'accessibilité

Attracteur

- Cette suite d'ensembles est évidemment croissante. Comme le nombre de sommets est fini, la suite est stationnaire à partir d'un certain rang.
- L'ensemble $A(F_1) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n(F_1)$ est appelé *attracteur de* J_1 et rassemble les sommets gagnants pour J_1 en un nombre fini de coups.

Notion d'attracteur dans un jeu d'accessibilité

Attracteur

- Cette suite d'ensembles est évidemment croissante. Comme le nombre de sommets est fini, la suite est stationnaire à partir d'un certain rang.
- L'ensemble $A(F_1) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n(F_1)$ est appelé *attracteur de J_1* et rassemble les sommets gagnants pour J_1 en un nombre fini de coups.
- Le calcul de l'attracteur peut se faire par un parcours en largeur du graphe (transposé) du jeu donc en $O(|S| + |A|)$. Mais attention : le graphe du jeu peut être énorme (songer au jeu d'échec).

Attracteur

Reprenons l'exemple du jeu SansIntérêt avec $F_1 = \{6\}$, $F2 = \{5\}$
$S_1 = \{0, 3, 4, 5\}$ et $S_2 = \{1, 2, 6, 7\}$

- $A_0(F_1) = \{6\}$

Attracteur

Reprenons l'exemple du jeu SansIntérêt avec $F_1 = \{6\}$, $F2 = \{5\}$
$S_1 = \{0, 3, 4, 5\}$ et $S_2 = \{1, 2, 6, 7\}$

- $A_0(F_1) = \{6\}$
- $A_1(F_1) = \{6\} \cup \{3, 4\} = \{3, 4, 6\}$

Attracteur

Reprenons l'exemple du jeu SansIntérêt avec $F_1 = \{6\}$, $F2 = \{5\}$
$S_1 = \{0, 3, 4, 5\}$ et $S_2 = \{1, 2, 6, 7\}$

- $A_0(F_1) = \{6\}$
- $A_1(F_1) = \{6\} \cup \{3, 4\} = \{3, 4, 6\}$
- $A_2(F_1) = \{3, 4, 6\} \cup \{1\} = \{1, 3, 4, 6\}$: $\boxed{1}$ a tous ses voisins dans $A_1(F_1)$, un voisin de $\boxed{2}$ n'est pas dans $A_1(F_1)$

Attracteur

Reprenons l'exemple du jeu SansIntérêt avec $F_1 = \{6\}$, $F2 = \{5\}$
$S_1 = \{0, 3, 4, 5\}$ et $S_2 = \{1, 2, 6, 7\}$

- $A_0(F_1) = \{6\}$
- $A_1(F_1) = \{6\} \cup \{3, 4\} = \{3, 4, 6\}$
- $A_2(F_1) = \{3, 4, 6\} \cup \{1\} = \{1, 3, 4, 6\}$: $\boxed{1}$ a tous ses voisins dans $A_1(F_1)$, un voisin de $\boxed{2}$ n'est pas dans $A_1(F_1)$
- $A_3(F_1) = \{1, 3, 4, 6\} \cup \{0\} = \{0, 1, 3, 4, 6\}$. $A_4(F_1) = A_3(F_1)$ donc $A(F_1) = \{0, 1, 3, 4, 6\}$

Attracteur

Reprenons l'exemple du jeu SansIntérêt avec $F_1 = \{6\}$, $F2 = \{5\}$ $S_1 = \{0, 3, 4, 5\}$ et $S_2 = \{1, 2, 6, 7\}$

- $A_0(F_1) = \{6\}$
- $A_1(F_1) = \{6\} \cup \{3, 4\} = \{3, 4, 6\}$
- $A_2(F_1) = \{3, 4, 6\} \cup \{1\} = \{1, 3, 4, 6\}$: $\boxed{1}$ a tous ses voisins dans $A_1(F_1)$, un voisin de $\boxed{2}$ n'est pas dans $A_1(F_1)$
- $A_3(F_1) = \{1, 3, 4, 6\} \cup \{0\} = \{0, 1, 3, 4, 6\}$. $A_4(F_1) = A_3(F_1)$ donc $A(F_1) = \{0, 1, 3, 4, 6\}$
- De même, on calcule $A(F_2) = \{5, 2, 7\}$.

1. Jeux à 2 joueurs

2. Algorithme min-max

Notion d'heuristique

- L'*heuristique* est « l'art d'inventer, de faire des découvertes » en résolvant des problèmes à partir de connaissances incomplètes (Wikipedia).
  Ce type d'analyse permet d'aboutir en un temps limité à des solutions acceptables. Celles-ci peuvent s'écarter de la solution optimale.

Notion d'heuristique

- L'*heuristique* est « l'art d'inventer, de faire des découvertes » en résolvant des problèmes à partir de connaissances incomplètes (Wikipedia).
  Ce type d'analyse permet d'aboutir en un temps limité à des solutions acceptables. Celles-ci peuvent s'écarter de la solution optimale.
- On a déjà rencontré une heuristique. Alors que l'algorithme de *Dijkstra* permet dans tous les cas de calculer le PCC d'un sommet à un autre, l'algorithme A* vu en 1ere année essaye de n'explorer que les sommets « prometteurs ».
  Ce faisant, il introduit la notion de *score* en privilégiant l'exploration des sommets de meilleurs scores.
  Il fait un choix optimum à tout instant (en ce sens, c'est un algorithme *glouton* comme Dijkstra) mais il peut aboutir à une solution non optimale.

Notion d'heuristique

- L'*heuristique* est « l'art d'inventer, de faire des découvertes » en résolvant des problèmes à partir de connaissances incomplètes (Wikipedia).
  Ce type d'analyse permet d'aboutir en un temps limité à des solutions acceptables. Celles-ci peuvent s'écarter de la solution optimale.
- On a déjà rencontré une heuristique. Alors que l'algorithme de *Dijkstra* permet dans tous les cas de calculer le PCC d'un sommet à un autre, l'algorithme A* vu en 1ere année essaye de n'explorer que les sommets « prometteurs ».
  Ce faisant, il introduit la notion de *score* en privilégiant l'exploration des sommets de meilleurs scores.
  Il fait un choix optimum à tout instant (en ce sens, c'est un algorithme *glouton* comme Dijkstra) mais il peut aboutir à une solution non optimale.
- L'algorithme *min-max* présenté ici est très coûteux dans sa forme la plus simple, on l'associe alors à une heuristique.

Limitation du calcul de l'attracteur

- Quand le graphe associé au jeu est très gros (penser au jeu d'échec) ou même infini, il n'est pas possible de calculer l'attracteur sur une machine (problème de place mémoire).

Limitation du calcul de l'attracteur

- Quand le graphe associé au jeu est très gros (penser au jeu d'échec) ou même infini, il n'est pas possible de calculer l'attracteur sur une machine (problème de place mémoire).
- Plutôt que de travailler sur le graphe du jeu, on travaille dans cette section sur l'*arbre de décision* du jeu (aussi appelé *arbre du jeu*).

Limitation du calcul de l'attracteur

- Quand le graphe associé au jeu est très gros (penser au jeu d'échec) ou même infini, il n'est pas possible de calculer l'attracteur sur une machine (problème de place mémoire).
- Plutôt que de travailler sur le graphe du jeu, on travaille dans cette section sur l'*arbre de décision* du jeu (aussi appelé *arbre du jeu*).
- L'arbre du jeu est potentiellement très gros voire infini (exemple : au jeu d'échec, les joueurs peuvent créer un cycle à 4 sommets ainsi : le joueur 1 avance sa dame d'une case, le joueur 2 la recule d'une case, puis le joueur 1 recule sa dame, le 2 l'avance etc.)

Limitation du calcul de l'attracteur

- Quand le graphe associé au jeu est très gros (penser au jeu d'échec) ou même infini, il n'est pas possible de calculer l'attracteur sur une machine (problème de place mémoire).
- Plutôt que de travailler sur le graphe du jeu, on travaille dans cette section sur l'*arbre de décision* du jeu (aussi appelé *arbre du jeu*).
- L'arbre du jeu est potentiellement très gros voire infini (exemple : au jeu d'échec, les joueurs peuvent créer un cycle à 4 sommets ainsi : le joueur 1 avance sa dame d'une case, le joueur 2 la recule d'une case, puis le joueur 1 recule sa dame, le 2 l'avance etc.)
- On a donc le plus souvent recours à une *heuristique* : on n'explore que les branches de l'arbre de jeu considérées comme les ≪ plus prometteuses ≫ (selon un critère à déterminer) et pas la totalité.

Jeu de Nim

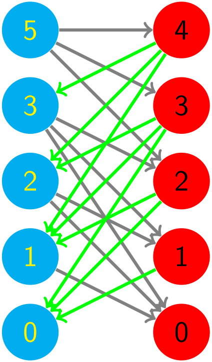
- Le *jeu de Nim* a plusieurs variantes. Dans une variante, il y a un tas d'objets et chaque joueur retire 1,2 ou 3 objets à tour de rôle.

Jeu de Nim

- Le *jeu de Nim* a plusieurs variantes. Dans une variante, il y a un tas d'objets et chaque joueur retire 1,2 ou 3 objets à tour de rôle.
- Le joueur qui vide le tas a gagné la partie.

Graphe du jeu de Nim

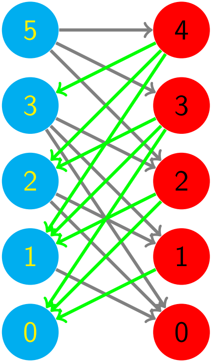
Considérons le jeu de Nim à 5 objets.
Voici son graphe de jeu :



- En bleu : sommets de J_1 ; rouge : J_2

Graphe du jeu de Nim

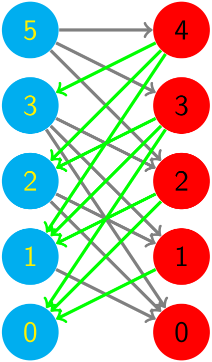
Considérons le jeu de Nim à 5 objets.
Voici son graphe de jeu :



- En bleu : sommets de J_1 ; rouge : J_2
- Les sommets sont numérotés en fonction du nombre d'allumettes.

Graphe du jeu de Nim

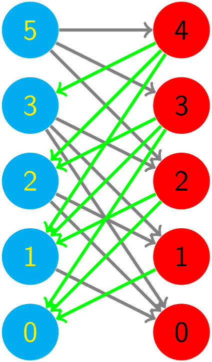
Considérons le jeu de Nim à 5 objets. Voici son graphe de jeu :



- En bleu : sommets de J_1 ; rouge : J_2
- Les sommets sont numérotés en fonction du nombre d'allumettes.
- Au départ, il y a 5 allumettes. Il ne peut y avoir de sommet 5 rouge.

Graphe du jeu de Nim

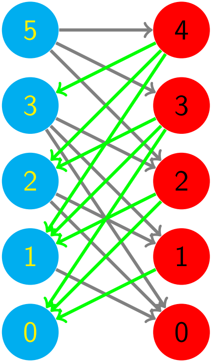
Considérons le jeu de Nim à 5 objets.
Voici son graphe de jeu :



- En bleu : sommets de J_1 ; rouge : J_2
- Les sommets sont numérotés en fonction du nombre d'allumettes.
- Au départ, il y a 5 allumettes. Il ne peut y avoir de sommet 5 rouge.
- J_1 retire au moins une allumette.

Graphe du jeu de Nim

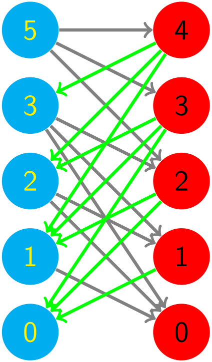
Considérons le jeu de Nim à 5 objets. Voici son graphe de jeu :



- En bleu : sommets de J_1 ; rouge : J_2
- Les sommets sont numérotés en fonction du nombre d'allumettes.
- Au départ, il y a 5 allumettes. Il ne peut y avoir de sommet 5 rouge.
- J_1 retire au moins une allumette.
- J_2 retire au moins une allumette à un tas d'au plus 4 allumettes.

Graphe du jeu de Nim

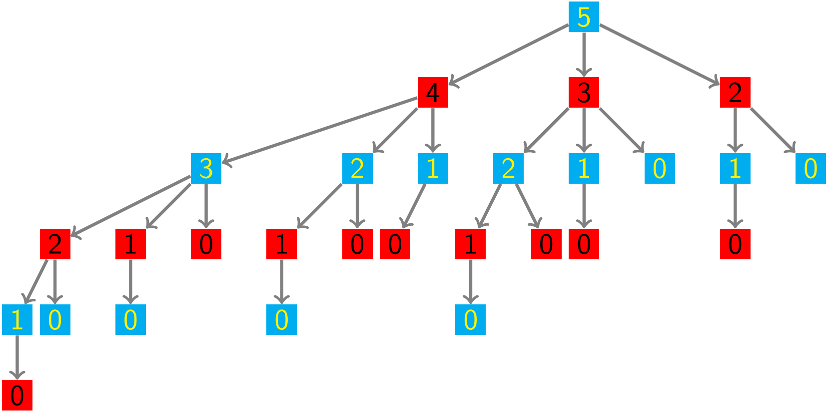
Considérons le jeu de Nim à 5 objets. Voici son graphe de jeu :



- En bleu : sommets de J_1 ; rouge : J_2
- Les sommets sont numérotés en fonction du nombre d'allumettes.
- Au départ, il y a 5 allumettes. Il ne peut y avoir de sommet 5 rouge.
- J_1 retire au moins une allumette.
- J_2 retire au moins une allumette à un tas d'au plus 4 allumettes.
- Donc il ne peut y avoir de sommet 4 bleu.

Arbre de jeu du jeu de Nim

Considérons le jeu de Nim à 5 objets. Voici son arbre de jeu :

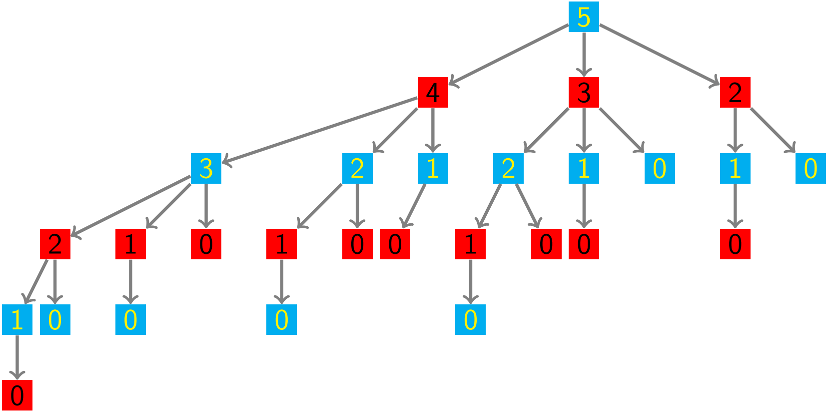


Chaque feuille de l'arbre indique si J_1 est gagnant ou perdant.

- Feuilles rouges : J_1 gagnant car J_2 ne peut plus jouer.

Arbre de jeu du jeu de Nim

Considérons le jeu de Nim à 5 objets. Voici son arbre de jeu :

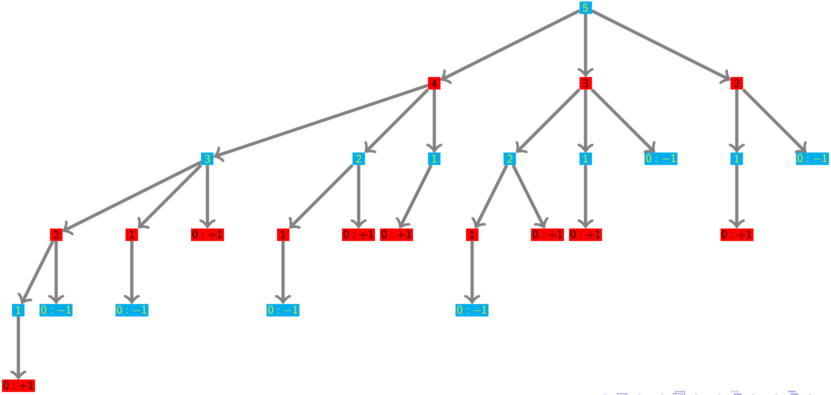


Chaque feuille de l'arbre indique si J_1 est gagnant ou perdant.

- Feuilles rouges : J_1 gagnant car J_2 ne peut plus jouer.
- Feuilles bleues : J_2 gagnant car J_1 ne peut plus jouer.

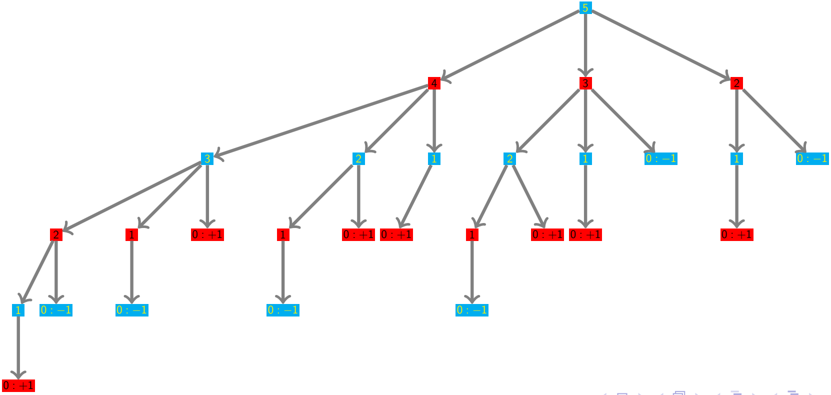
Algorithme min-max : initialisation

- On choisit son camp : ici on s'intéresse à J_1.



Algorithme min-max : initialisation

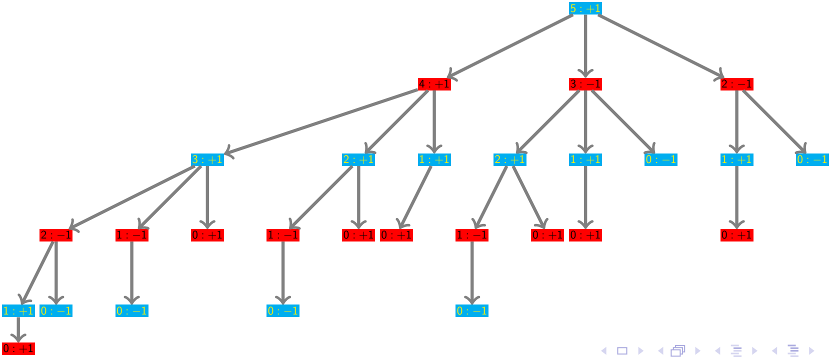
- On choisit son camp : ici on s'intéresse à J_1.
- On ajoute une valeur à chaque feuille : $+1$ si J_1 gagne, -1 sinon.
  Si le jeu n'est pas à somme nulle, il peut y avoir des ex æquo, dans ce cas on dispose aussi de la valeur 0.



Corps de l'algorithme min-max

On définit ensuite les valeurs de chaque nœud interne de façon récursive. On progresse des feuilles vers la racine.

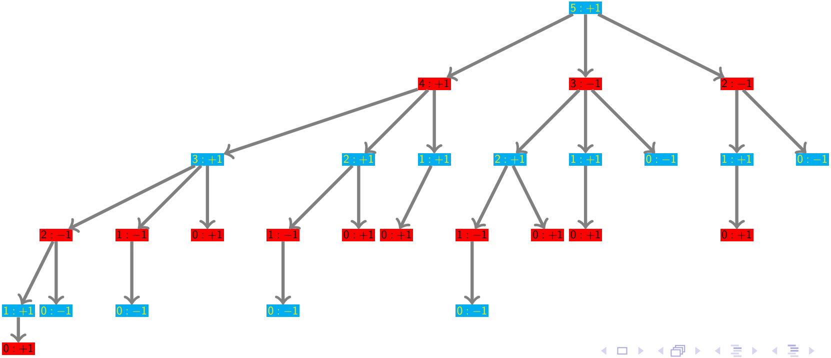
- Si le nœud est contrôlé par J_1 (en bleu), sa valeur est le maximum des valeurs de ses sous-arbres.



Corps de l'algorithme min-max

On définit ensuite les valeurs de chaque nœud interne de façon récursive. On progresse des feuilles vers la racine.

- Si le nœud est contrôlé par J_1 (en bleu), sa valeur est le maximum des valeurs de ses sous-arbres.
- Si le nœud est contrôlé par J_2 (en rouge), sa valeur est le minimum des valeurs de ses sous-arbres.



Détection d'une stratégie gagnante

- Principe : J_1 veut maximiser ses gains, J_2 veut minimiser ses pertes.

Détection d'une stratégie gagnante

- Principe : J_1 veut maximiser ses gains, J_2 veut minimiser ses pertes.
- Il y a une stratégie gagnante à partir d'un nœud pour J_1 si l'étiquette est positive.

Détection d'une stratégie gagnante

- Principe : J_1 veut maximiser ses gains, J_2 veut minimiser ses pertes.
- Il y a une stratégie gagnante à partir d'un nœud pour J_1 si l'étiquette est positive.
- Il y a une stratégie gagnante à partir d'un nœud pour J_2 si l'étiquette est négative.

Détection d'une stratégie gagnante

- Principe : J_1 veut maximiser ses gains, J_2 veut minimiser ses pertes.
- Il y a une stratégie gagnante à partir d'un nœud pour J_1 si l'étiquette est positive.
- Il y a une stratégie gagnante à partir d'un nœud pour J_2 si l'étiquette est négative.
- Pour déterminer une stratégie gagnante pour J_1, suivre une branche positive.

Détection d'une stratégie gagnante

- Principe : J_1 veut maximiser ses gains, J_2 veut minimiser ses pertes.
- Il y a une stratégie gagnante à partir d'un nœud pour J_1 si l'étiquette est positive.
- Il y a une stratégie gagnante à partir d'un nœud pour J_2 si l'étiquette est négative.
- Pour déterminer une stratégie gagnante pour J_1, suivre une branche positive.
- Par exemple, la stratégie s suivante est déterminée en suivant les branches positives. Elle est gagnante pour J_1.
  $s(5) = 4$; $s(3) = 0$; $s(2) = 0$; $s(1) = 0$;

Heuristique et min-max

- Lorsque la taille de l'arbre de jeu est trop grande, on évite de l'explorer complètement. On fait appel à une *heuristique*.

Heuristique et min-max

- Lorsque la taille de l'arbre de jeu est trop grande, on évite de l'explorer complètement. On fait appel à une *heuristique*.
- On n'explore alors que certaines branches sélectionnées selon des critères à fixer (et qui dépendent du jeu).
  On peut aussi n'explorer l'arbre que jusqu'à une certaine profondeur.

Heuristique et min-max

- On fixe une profondeur maximale d'exploration k et une fonction d'heuristique f (qui ne sera déclenchée qu'en arrivant sur un nœud de profondeur k possédant des descendants).

Heuristique et min-max

- On fixe une profondeur maximale d'exploration k et une fonction d'heuristique f (qui ne sera déclenchée qu'en arrivant sur un nœud de profondeur k possédant des descendants).
- Lors de l'exploration du nœud courant :

Heuristique et min-max

- On fixe une profondeur maximale d'exploration k et une fonction d'heuristique f (qui ne sera déclenchée qu'en arrivant sur un nœud de profondeur k possédant des descendants).
- Lors de l'exploration du nœud courant :
  - Si le nœud est une feuille, on fait comme avant. On lui attribue une valeur positive (par exemple $+100$ si la feuille appartient à J_1 et -100 sinon). En cas de feuille de match nul, on attribue 0.

Heuristique et min-max

- On fixe une profondeur maximale d'exploration k et une fonction d'heuristique f (qui ne sera déclenchée qu'en arrivant sur un nœud de profondeur k possédant des descendants).
- Lors de l'exploration du nœud courant :
  - Si le nœud est une feuille, on fait comme avant. On lui attribue une valeur positive (par exemple $+100$ si la feuille appartient à J_1 et -100 sinon). En cas de feuille de match nul, on attribue 0.
  - Si le nœud a des descendants mais que la profondeur max est atteinte, on lui attribue la valeur fixée par l'heuristique (positivement si le nœud appartient à J_1, négativement sinon)

Heuristique et min-max

- On fixe une profondeur maximale d'exploration k et une fonction d'heuristique f (qui ne sera déclenchée qu'en arrivant sur un nœud de profondeur k possédant des descendants).
- Lors de l'exploration du nœud courant :
  - Si le nœud est une feuille, on fait comme avant. On lui attribue une valeur positive (par exemple $+100$ si la feuille appartient à J_1 et -100 sinon). En cas de feuille de match nul, on attribue 0.
  - Si le nœud a des descendants mais que la profondeur max est atteinte, on lui attribue la valeur fixée par l'heuristique (positivement si le nœud appartient à J_1, négativement sinon)
  - Dans tous les autres cas, on fait comme avant : on attribue au père la valeur maximale des fils si le nœud appartient à J_1, le minimum sinon.