

TP OCAML : entiers de Peano

Donnons nous le

```
1 || type peano = Z | S of peano;;
```

Il représente les entiers de Peano.

Pour moins de parenthèses écrivons Sx pour $S(x)$ et posons que S est prioritaire sur $+$, c.a.d que $Sx + y = S(x) + y$.

1. Écrire la fonction `(++) (x:peano) (y:peano) : peano` d'addition des entiers de Peano.
2. Montrer la propriété $P(x) : \forall y, S(x + y) = x + Sy$.
Remarque. Comme on a déjà $S(x + y) = Sx + y$, pour calculer le successeur d'une somme, on peut maintenant faire porter le constructeur S sur le membre gauche ou le membre droit selon ce qui nous arrange.
3. Écrire la fonction `dbl (x:peano) : peano` qui calcule le double d'un entier en doublant le nombre de S sans utiliser l'addition précédente.
4. Montrer que `dbl x = x ++ x`.
5. Montrer que `++` est commutative.
6. Montrer l'associativité de l'addition.
7. Écrire la fonction `(<<) (x:peano) (y:peano) : bool` qui indique si x est strictement plus petit que y . Aucune `int` ne doit être utilisé.
8. Établir que la relation « strictement inférieure » est compatible avec l'addition, c'est à dire que si $x << y$ alors $x + a << y + a$ pour tous entiers x, y, a de Peano.
9. Écrire la fonction `(**) (x:peano) (y:peano) : peano` qui calcule le produit de deux nombres.
10. À suivre...