Arbres binaires en OCaml. Exercices en cours

Exercice 1. On utilise ici le type :

```
type 'a arbre = Nil | Node of ('a arbre * 'a * 'a arbre);;
```

Il modélise des arbres binaires. On rappelle qu'un *nœud* d'un arbre A est un sous-arbres non vide, une *feuille* un nœud dont les fils sont vides et un *nœud interne* un nœud qui n'est pas une feuille. Une *branche* est un chemin de la racine aux feuilles. La *profondeur* d'un nœud est la distance qui le sépare de la racine, celle d'un arbre est la plus grand profondeur de feuille. La profondeur de la racine étant zéro. La *taille* est le nombre de nœuds.

1. Représenter :

```
let a = let b = Node (Nil, 1, Nil) and c = Node (Nil, 2, Nil)
      and d = Node (Nil, 4, Nil) in let g = Node (b,4,c) and
          f=
      Node (Nil, 5, Node(d,3,Nil)) in Node(g,6,f);;
```

2. Implanter les grands classiques que sont **taille a** et **hauteur a** qui donne la plus grande profondeur de feuille.
   Donner la complexité de **hauteur**
3. **nb_feuilles** qui donne le nombre de feuilles.
4. **nb_internes** qui donne le nombre de nœuds. internes.
5. Donner la fonction **applique a m** de signature **'a arbre -> ('a -> 'a -> 'a) -> 'a** où a est un arbre et m un opérateur binaire associatif et commutatif. La fonction retourne le résultat de m appliqué à toutes les étiquettes de l'arbre (il faut donc que l'arbre ait au moins deux nœuds). Par exemple m peut être l'opérateur **max**.

Exercice 2. Avec le type d'arbres du cours, implanter la fonction **miroir** qui prend en paramètre un arbre et renvoie l'arbre miroir : l'arbre initial dont les fils gauches des nœuds deviennent des fils droits et réciproquement.

```
let bt = Node(Node(Nil,1,Node(Nil,2,Nil)),3,Node(Nil,4,Nil))
in miroir bt;;
  - : int arbre =
Node (Node (Nil, 4, Nil), 3, Node (Node (Nil, 2, Nil), 1, Nil))
```

Exercice 3. Dans cet exercice, on se donne le type :

```
type arith = Val of int | Plus of arith * arith
| Mult of arith * arith | Minus of arith * arith
| Div of arith * arith | Opp of arith;;
```

Il modélise les expressions arithémtiques.

1. Exprimer -2 de de deux façons.
2. Écrire la fonction **eval (a :arith) : int** qui évalue une expression de type **arith** selon un parcours en profondeur suffixe.

```
# let a = let deux = Val 2 and trois = Val 3 and six = Val 6
    and
  quatre = Val 4 in Plus(Minus(six,quatre),Mult(Plus(trois,
      deux),Opp deux)) in eval a;;
- : int = -8
```

Exercice 4. Dans cet exercice, on se donne le type :

```
type 'a tree = F of 'a | N of 'a tree * 'a * 'a tree;;
```

1. Peut-on représenter ainsi l'arbre vide ?
2. A quelle catégorie appartiennent les arbres ainsi modélisés ?
3. Écrire les fonctions **size : 'a tree -> int** et **height : 'a tree -> int** dont les noms se passent de commentaires.
4. Définissons le *nombre de Strahler* d'un arbre récursivement :
   — Si l'arbre est réduit à une feuille, son nombre de Strahler est 1 ;
   — Sinon
      — Si les deux fils ont des nombres de Strahler s, s' avec $s < s'$ alors son nombre de Strahler est s'.
      — Sinon si les deux fils ont même nombre de Strahler s alors son nombre de Strahler est $s + 1$.

   (a) Écrire le fonction **strahler : 'a tree -> int** qui calcule le nombre de Strahler d'un arbre.

   (b) Déterminer le nombre de Strahler d'un arbre parfait.

Exercice 5. Ecrire la fonction **path** de type **'a arbre -> 'a -> 'a list** qui renvoie la liste des étiquettes d'un chemin allant de la racine de **a** à un nœud d'étiquette **x**.

Avec :

```
# let a = let b = Node (Nil, 1, Nil) and c = Node (Nil, 2, Nil)
      and d = Node (Nil, 3, Nil) in let g = Node (b,4,c) and f=
      Node (Nil, 5, Node(d,6,Nil)) in Node(g,7,f) in
      path a 8;;
```

on obtient :

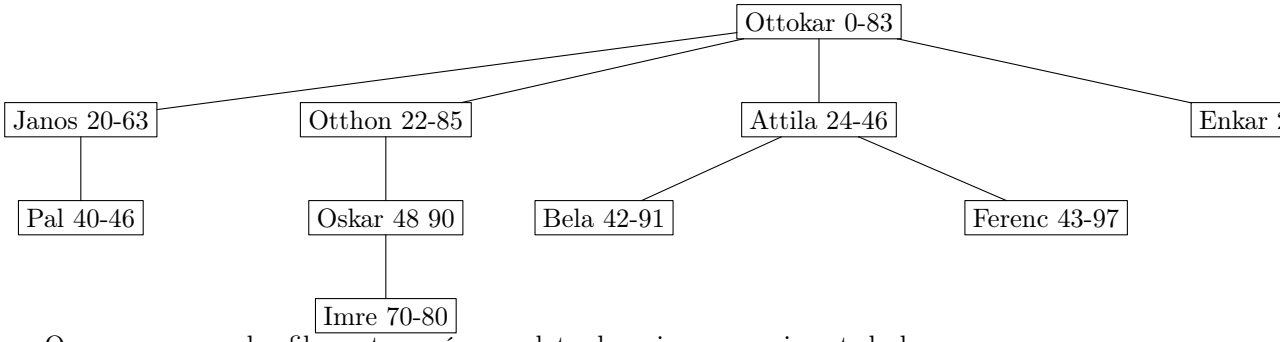
```
# path a 6;;
- : int list = [7; 5; 6]
# path a 8;;
- : int list = []
```

Exercice 6. Dans cet exercice, les arbres ne sont pas binaires. Il sont représentés par le type

```
type king = K of string * int *int * (king list);;
```

Un arbre représente tous les descendants mâles directs de la descendance directe du roi de Syldavie. Chaque étiquette est un triplet constitué du prénom, de la date de naissance et de celle de décès de ce descendant.

Par exemple considérons



On suppose que les fils sont rangés par date de naissance croissant de la gauche vers la droite. On suppose aussi qu'un fils né toujours avant la mort de son père (les rois de Syldavie ont la santé solide).

Écrire la fonction **rois** qui prend en paramètre un arbre généalogique et imprime dans l'ordre les noms des dépositaires du titre.

Par exemple, avec l'arbre ci-dessus, on doit obtenir Ottokar, Othon, Oskar, Bela et Ferrenc.

Un fils aîné, s'il n'est pas déjà mort au décès de son père doit régner et ses descendants sont prioritaires par rapport aux autres fils du roi et leurs descendants. Si le fils aîné meurt avant d'accéder au trône, on tente de faire régner son fils aîné. C'est uniquement lorsque cette branche de la descendance est épuisée qu'on passe au second fils de la racine etc. En clair, on explore prioritairement les branches gauches.