TD : Logique

Exercice 1. Soit φ une proposition et $c(\varphi)$ le nombre de connecteurs binaires dans φ.

Exprimer $t(\varphi)$, le nombre de terminaux (variables ou constantes) dans φ en fonction de $c(\varphi)$.

Exercice 2. Soit φ, ψ deux propositions. Montrer que $\varphi \models \psi$ est équivalent à « pour tout contexte μ on a $\varepsilon_\mu(\varphi) \leq \varepsilon_\mu(\psi)$ ».

Exercice 3. Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ des propositions. Montrer que les propositions suivantes sont des tautologies :

1. $\varphi_1 \longrightarrow (\varphi_2 \longrightarrow \varphi_1)$
2. $(\varphi_1 \longrightarrow \varphi_2) \vee (\varphi_2 \longrightarrow \varphi_3)$
3. $(\neg\neg\varphi_1) \longrightarrow \varphi_1$.

Pour l'équivalence suivante, la prouver ou exhiber un contre-exemple :

4. $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \longrightarrow \varphi_3 \equiv \varphi_1 \longrightarrow (\varphi_2 \longrightarrow \varphi_3)$

Exercice 4. Trois personnes (nommée Alfred, Bob, Charles) mangent ensemble. On sait que :

- si Alfred prend un dessert, Bob aussi
- soit Bob, soit Charles prennent un dessert, mais pas les deux
- Alfred ou Charles prend un dessert
- Au moins deux personnes prennent un dessert

Déterminer qui prend un dessert.

Exercice 5. Soient $v_1, v_2, \ldots, v_n$ des variables et $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des propositions. La *substitution* de $f_1, \ldots, f_n$ à $v_1, \ldots, v_n$ est l'application S définie sur l'ensemble des propositions telle que $S(p)$ est p dans laquelle toute occurence de la variable v_i ($i = 1 \ldots, n$) est remplacée par f_i (ces opérations étant effectuées *simultanément*).

1. Ecrire la fonction `substitution f p` qui prend en paramètre une fonction f associant à toute variable une proposition et une proposition p. Elle applique f a toutes les variables de p.

   On se place dans le type suivant :

```
type 'a prop =
|V
|F
|VAR of 'a
|NEG of 'a prop
|OU of 'a prop * 'a prop
|ET of 'a prop * 'a prop;;
```

```
(*exemple de fonction f agissant sur les variables*)
let f p = match p with
    VAR 2 -> OU (VAR 6, NEG(VAR 3))
  | VAR 0 -> ET (V, NEG(VAR 2))
  | VAR x -> x
  | _ -> failwith "not a variable"
  ;;
```

2. Montrer que, pour toute substitution S (de $f_1, f_2, \dots, f_n$ à $v_1, v_2, \dots, v_n$), toute proposition p et tout contexte μ, on a :

$$\varepsilon_\mu(S(p)) = \varepsilon_{\mu'}(p) \text{ où, pour toute variable } v,\ \mu'(v) = \begin{cases} \varepsilon_\mu(f_i) \text{ si } v = v_i \\ \mu(v) \text{ si } v \text{ n'est pas un des } v_i \end{cases}$$

3. Soient f, g deux expressions équivalentes. Montrer que $S(f)$ et $S(g)$ sont équivalentes aussi.

Exercice 6. On se place dans l'ensemble des propositions construites uniquement avec des variables, et les connecteurs $\neg, \vee, \wedge$.

Pour une proposition p, la proposition $d(p)$ est p dans laquelle

— toutes les doubles négations sont supprimées

— toutes les négations sont descendues au contact des variable par les lois de de Morgan.

Bien entendu, $d(p)$ est sémantiquement équivalente à p [1].

La proposition $c(p)$ est p dans laquelle on échange les $\vee$ et les $\wedge$.

1. Donner une définition inductive de d et c.
2. Etablir que $c(d(p)) = d(c(p))$ pour toute proposition p.
3. Soient deux propositions sémantiquement équivalentes p_1, p_2
   Montrer que $c(p_1)$ et $c(p_2)$ sont sémantiquement équivalentes.

Exercice 7. Prouver le séquent $\vdash (p \to q) \vee (q \to r)$

1. Cela se démontre mais dans cet exercice on l'admet.