Programmation Dynamique

Lycée Thiers

1. Présentation

2. Exemples
   - Suites de Fibonacci
   - Partition équilibrée d'un tableau d'entiers positifs

1 Présentation

2 Exemples
- Suites de Fibonacci
- Partition équilibrée d'un tableau d'entiers positifs

Introduction

La résolution d'un problème peut parfois se faire en le décomposant en sous-problèmes. Dans cette approche, les solutions aux sous-problèmes sont ensuite combinées pour construire la solution au problème initial.

- si les sous-problèmes sont *indépendants* les uns des autres (exemple : décomposition en sous-ensembles disjoints comme pour le tri fusion), on parle de méthode *diviser pour régner* ;

Introduction

La résolution d'un problème peut parfois se faire en le décomposant en sous-problèmes. Dans cette approche, les solutions aux sous-problèmes sont ensuite combinées pour construire la solution au problème initial.

- si les sous-problèmes sont *indépendants* les uns des autres (exemple : décomposition en sous-ensembles disjoints comme pour le tri fusion), on parle de méthode *diviser pour régner* ;
- si les sous-problèmes sont *dépendants* (exemple : si un même calcul -avec les mêmes paramètres- est fait par chaque sous-problème), on parle de *programmation dynamique*.

Historique

- *Programmation dynamique* : processus de résolution de problèmes où on trouve les meilleures décisions les unes après les autres.
  Le terme était utilisé par le mathématicien Richard Bellman dès les années 40.

Historique

- *Programmation dynamique* : processus de résolution de problèmes où on trouve les meilleures décisions les unes après les autres.
  Le terme était utilisé par le mathématicien Richard Bellman dès les années 40.
- En 1953, Bellman en donne la définition moderne, où les décisions à prendre sont ordonnées par sous-problèmes.
  le domaine a alors été reconnu par l'Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) comme un sujet d'analyse de systèmes et d'ingénierie.

Diviser pour régner

- La méthode *Diviser pour régner* est un cas particulier de programmation dynamique.

Diviser pour régner

- La méthode *Diviser pour régner* est un cas particulier de programmation dynamique.
- On décompose encore un problème principal en sous-problèmes. Cependant, les sous-problèmes sont ici indépendants les uns des autres ce qui facilite la tâche du programmeur.

Diviser pour régner

- La méthode *Diviser pour régner* est un cas particulier de programmation dynamique.
- On décompose encore un problème principal en sous-problèmes. Cependant, les sous-problèmes sont ici indépendants les uns des autres ce qui facilite la tâche du programmeur.
- Principe :

Diviser pour régner

- La méthode *Diviser pour régner* est un cas particulier de programmation dynamique.
- On décompose encore un problème principal en sous-problèmes. Cependant, les sous-problèmes sont ici indépendants les uns des autres ce qui facilite la tâche du programmeur.
- Principe :
  - On **divise** en réduisant un problème en sous-problèmes du même type et qui ne se *chevauchent* pas.

Diviser pour régner

- La méthode *Diviser pour régner* est un cas particulier de programmation dynamique.
- On décompose encore un problème principal en sous-problèmes. Cependant, les sous-problèmes sont ici indépendants les uns des autres ce qui facilite la tâche du programmeur.
- Principe :
  - On **divise** en réduisant un problème en sous-problèmes du même type et qui ne se *chevauchent* pas.
  - Puis on **règne** en résolvant ces sous-problèmes.

Diviser pour régner

- La méthode *Diviser pour régner* est un cas particulier de programmation dynamique.
- On décompose encore un problème principal en sous-problèmes. Cependant, les sous-problèmes sont ici indépendants les uns des autres ce qui facilite la tâche du programmeur.
- Principe :
  - On **divise** en réduisant un problème en sous-problèmes du même type et qui ne se *chevauchent* pas.
  - Puis on **règne** en résolvant ces sous-problèmes.
  - Il reste à **rassembler** les solutions des sous-problèmes pour obtenir une soution au problème initial.

Cadre d'application

- La programmation dynamique est envisagée si le problème présente la *propriété de sous-structure optimale* et si les *chevauchements de sous-problèmes* doivent être gérés.

Cadre d'application

- La programmation dynamique est envisagée si le problème présente la *propriété de sous-structure optimale* et si les *chevauchements de sous-problèmes* doivent être gérés.
- Vocabulaire :

Cadre d'application

- La programmation dynamique est envisagée si le problème présente la *propriété de sous-structure optimale* et si les *chevauchements de sous-problèmes* doivent être gérés.
- Vocabulaire :

  Sous-structure optimale Se dit d'un problème qu'on peut résoudre en le décomposant en sous-problèmes du même type, eux-mêmes résolubles récursivement.

Cadre d'application

- La programmation dynamique est envisagée si le problème présente la *propriété de sous-structure optimale* et si les *chevauchements de sous-problèmes* doivent être gérés.
- Vocabulaire :

  Sous-structure optimale Se dit d'un problème qu'on peut résoudre en le décomposant en sous-problèmes du même type, eux-mêmes résolubles récursivement.

  Chevauchement de sous-problèmes Se dit si des sous-problèmes ne sont pas indépendants et doivent être résolus plusieurs fois.

Cadre d'application

- La programmation dynamique est envisagée si le problème présente la *propriété de sous-structure optimale* et si les *chevauchements de sous-problèmes* doivent être gérés.
- Vocabulaire :

  Sous-structure optimale Se dit d'un problème qu'on peut résoudre en le décomposant en sous-problèmes du même type, eux-mêmes résolubles récursivement.

  Chevauchement de sous-problèmes Se dit si des sous-problèmes ne sont pas indépendants et doivent être résolus plusieurs fois.
- En général on envisage tous les sous-problèmes comme dans une recherche exhaustive mais on prend ses précautions pour ne pas avoir à les résoudre tous :

Cadre d'application

- La programmation dynamique est envisagée si le problème présente la *propriété de sous-structure optimale* et si les *chevauchements de sous-problèmes* doivent être gérés.
- Vocabulaire :

  Sous-structure optimale Se dit d'un problème qu'on peut résoudre en le décomposant en sous-problèmes du même type, eux-mêmes résolubles récursivement.

  Chevauchement de sous-problèmes Se dit si des sous-problèmes ne sont pas indépendants et doivent être résolus plusieurs fois.
- En général on envisage tous les sous-problèmes comme dans une recherche exhaustive mais on prend ses précautions pour ne pas avoir à les résoudre tous :
  - soit parce que certains sont inutiles (ex : recherche dichotomique)

Cadre d'application

- La programmation dynamique est envisagée si le problème présente la *propriété de sous-structure optimale* et si les *chevauchements de sous-problèmes* doivent être gérés.
- Vocabulaire :

  Sous-structure optimale Se dit d'un problème qu'on peut résoudre en le décomposant en sous-problèmes du même type, eux-mêmes résolubles récursivement.

  Chevauchement de sous-problèmes Se dit si des sous-problèmes ne sont pas indépendants et doivent être résolus plusieurs fois.
- En général on envisage tous les sous-problèmes comme dans une recherche exhaustive mais on prend ses précautions pour ne pas avoir à les résoudre tous :
  - soit parce que certains sont inutiles (ex : recherche dichotomique)
  - soit parce qu'ils ont déjà été rencontrés et résolus (ex : mémoïsation dans le calcul des suites de Fibonacci)

Principe d'optimalité

- La programmation dynamique s'applique à des problèmes d'optimisations : il s'agit souvent d'optimiser le coût d'une suite de décisions.

Principe d'optimalité

- La programmation dynamique s'applique à des problèmes d'optimisations : il s'agit souvent d'optimiser le coût d'une suite de décisions.
- Cette suite de décisions correspond à un découpage du problème en sous-problèmes :

Principe d'optimalité

- La programmation dynamique s'applique à des problèmes d'optimisations : il s'agit souvent d'optimiser le coût d'une suite de décisions.
- Cette suite de décisions correspond à un découpage du problème en sous-problèmes :
  - On calcule les solutions optimales successives comme pour un algorithme glouton à des sous problèmes liés par une relation de récurrence.

Principe d'optimalité

- La programmation dynamique s'applique à des problèmes d'optimisations : il s'agit souvent d'optimiser le coût d'une suite de décisions.
- Cette suite de décisions correspond à un découpage du problème en sous-problèmes :
  - On calcule les solutions optimales successives comme pour un algorithme glouton à des sous problèmes liés par une relation de récurrence.
  - Puis, c'est la combinaison de ces solutions qui produit la solution au problème initial.

Principe d'optimalité

- La programmation dynamique s'applique à des problèmes d'optimisations : il s'agit souvent d'optimiser le coût d'une suite de décisions.
- Cette suite de décisions correspond à un découpage du problème en sous-problèmes :
  - On calcule les solutions optimales successives comme pour un algorithme glouton à des sous problèmes liés par une relation de récurrence.
  - Puis, c'est la combinaison de ces solutions qui produit la solution au problème initial.
- *Principe d'optimalité de Bellman* : une solution optimale pour un problème présentant la propriété de sous-structure optimale est la combinaison de solutions optimales locales pour les sous-problèmes.

Programmation dynamique et graphes

- Un théorème général énonce que tout algorithme de programmation dynamique peut se ramener à la recherche du plus court chemin dans un graphe.

Programmation dynamique et graphes

- Un théorème général énonce que tout algorithme de programmation dynamique peut se ramener à la recherche du plus court chemin dans un graphe.
- Or, les techniques de recherche heuristique basées sur l'algorithme A* permettent d'exploiter les propriétés spécifiques d'un problème pour gagner en temps de calcul.

Programmation dynamique et graphes

- Un théorème général énonce que tout algorithme de programmation dynamique peut se ramener à la recherche du plus court chemin dans un graphe.
- Or, les techniques de recherche heuristique basées sur l'algorithme A* permettent d'exploiter les propriétés spécifiques d'un problème pour gagner en temps de calcul.
- Autrement dit, il est souvent plus avantageux d'exploiter un algorithme A* que d'utiliser la programmation dynamique.

1 Présentation

2 Exemples
- Suites de Fibonacci
- Partition équilibrée d'un tableau d'entiers positifs

1 Présentation

2 Exemples
- Suites de Fibonacci
- Partition équilibrée d'un tableau d'entiers positifs

Voirt TD dédié.

Définition, première implémentation

- On appelle *suite de Fibonacci* toute suite réelle ou complexe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ récurrente d'ordre 2 définie par $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Souvent $f_0 = 0, f_1 = 1$, c'est ce que nous prendrons par la suite.

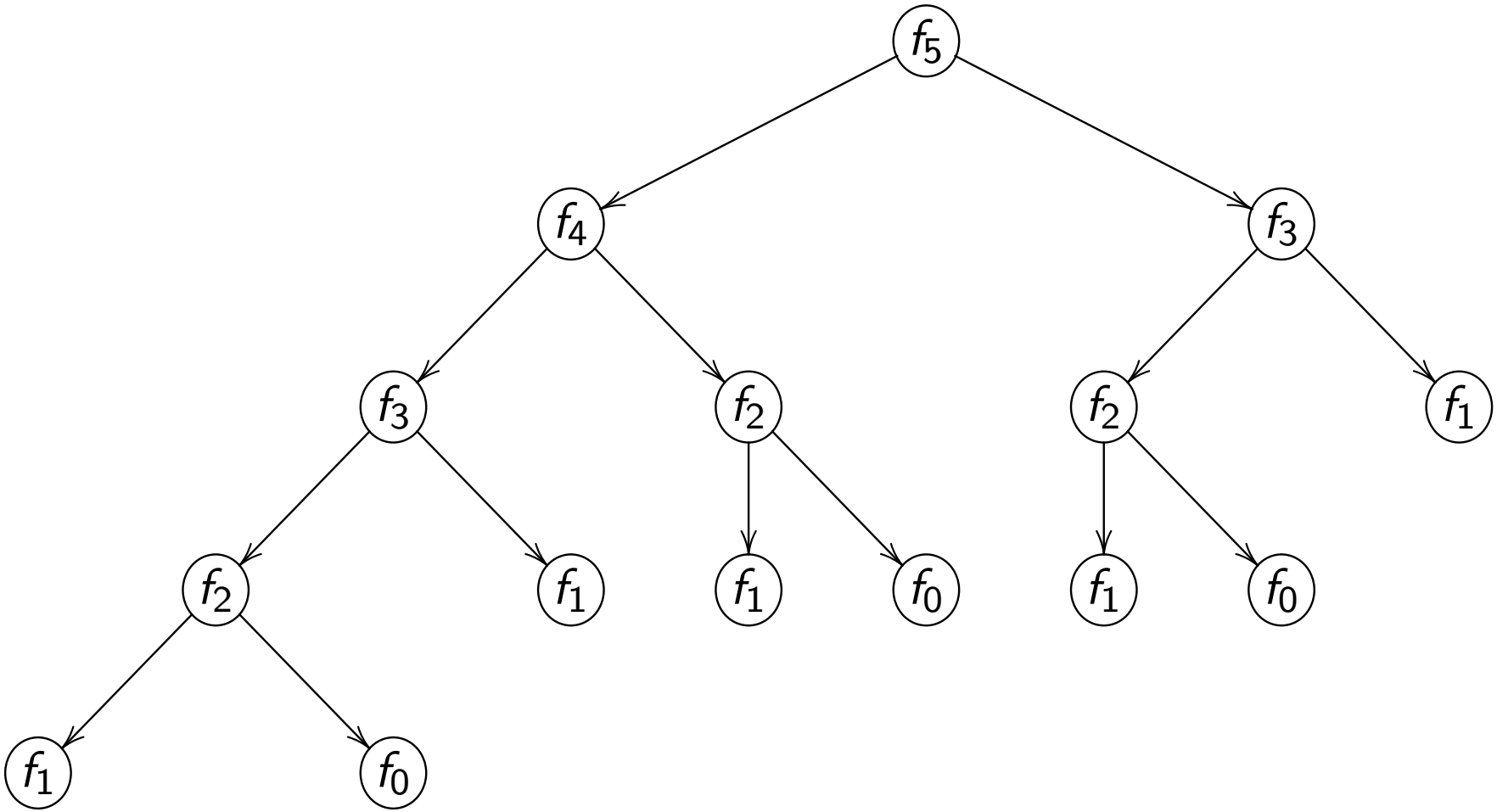
Définition, première implémentation

- On appelle *suite de Fibonacci* toute suite réelle ou complexe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ récurrente d'ordre 2 définie par $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Souvent $f_0 = 0, f_1 = 1$, c'est ce que nous prendrons par la suite.
- On peut alors proposer le code suivant :

```
1 let rec fib n =
2   match n with
3   |0 | 1 -> n
4   | _ -> (fib (n-1)) + (fib (n-2));;
```

Première implémentation

Calcul de f_5



On constate que f_2 est calculé 3 fois.

Première implémentation

Complexité

- Si $C(n)$ est la complexité pour calculer f_n, alors

$$C(n) = C(n-1) + C(n-2) + 1$$

Première implémentation

Complexité

- Si $C(n)$ est la complexité pour calculer f_n, alors

$$C(n) = C(n-1) + C(n-2) + 1$$

- On pose $C(0) = C(1) = 1$.

Première implémentation

Complexité

- Si $C(n)$ est la complexité pour calculer f_n, alors

$$C(n) = C(n-1) + C(n-2) + 1$$

- On pose $C(0) = C(1) = 1$.
- L'équation canonique de cette récurrence linéaire est $x^2 - x - 1 = 0$, de solutions $\varphi, \bar{\varphi}$ (nombre d'or et son conjugué). $\varphi > 1, |\bar{\varphi}| < 1$.

Première implémentation

Complexité

- Si $C(n)$ est la complexité pour calculer f_n, alors

$$C(n) = C(n-1) + C(n-2) + 1$$

- On pose $C(0) = C(1) = 1$.
- L'équation canonique de cette récurrence linéaire est $x^2 - x - 1 = 0$, de solutions $\varphi, \bar{\varphi}$ (nombre d'or et son conjugué). $\varphi > 1, |\bar{\varphi}| < 1$.
- Une solution particulière est la suite constante de TG -1.

Première implémentation

Complexité

- Si $C(n)$ est la complexité pour calculer f_n, alors

$$C(n) = C(n-1) + C(n-2) + 1$$

- On pose $C(0) = C(1) = 1$.
- L'équation canonique de cette récurrence linéaire est $x^2 - x - 1 = 0$, de solutions $\varphi, \bar{\varphi}$ (nombre d'or et son conjugué). $\varphi > 1, |\bar{\varphi}| < 1$.
- Une solution particulière est la suite constante de TG -1.
- Les solutions sont de la forme

$$\alpha \underbrace{\varphi^n}_{\to +\infty} + \beta \underbrace{\bar{\varphi}^n}_{\to 0} - 1$$

Première implémentation

Complexité

- Si $C(n)$ est la complexité pour calculer f_n, alors

$$C(n) = C(n-1) + C(n-2) + 1$$

- On pose $C(0) = C(1) = 1$.
- L'équation canonique de cette récurrence linéaire est $x^2 - x - 1 = 0$, de solutions $\varphi, \bar{\varphi}$ (nombre d'or et son conjugué). $\varphi > 1, |\bar{\varphi}| < 1$.
- Une solution particulière est la suite constante de TG -1.
- Les solutions sont de la forme

$$\alpha \underbrace{\varphi^n}_{\to +\infty} + \beta \underbrace{\bar{\varphi}^n}_{\to 0} - 1$$

- On peut calculer α, β par un système d'équations mais ce n'est pas la peine because $C(n) > 0$. On a donc $\alpha > 0$ pour raison de limite. Il vient que la complexité est un $\Theta(\varphi^n)$.

Fibonacci : mémoïsation

Approche descendante

- **Mémoïsation** :

Fibonacci : mémoïsation

Approche descendante

- **Mémoïsation** :
  - On mémorise une valeur de la suite si c'est la première fois qu'on la rencontre.

Fibonacci : mémoïsation

Approche descendante

- **Mémoïsation** :
  - On mémorise une valeur de la suite si c'est la première fois qu'on la rencontre.
  - Si on a déjà rencontré le calcul courant, on récupère sa valeur par un accès à la structure de stockage en $O(1)$

Fibonacci : mémoïsation

Approche descendante

- **Mémoïsation** :
  - On mémorise une valeur de la suite si c'est la première fois qu'on la rencontre.
  - Si on a déjà rencontré le calcul courant, on récupère sa valeur par un accès à la structure de stockage en $O(1)$
  - On ne lance le calcul que si la valeur voulue n'a pas déjà été calculée.

Fibonacci : mémoïsation

Approche descendante

- **Mémoïsation** :
  - On mémorise une valeur de la suite si c'est la première fois qu'on la rencontre.
  - Si on a déjà rencontré le calcul courant, on récupère sa valeur par un accès à la structure de stockage en $O(1)$
  - On ne lance le calcul que si la valeur voulue n'a pas déjà été calculée.
- *Approche descendante* : On commence par lancer les calculs pour les valeurs de paramètres les plus grands. Ces calculs induisent des appels avec des paramètres plus petits.

Fibonacci : mémoïsation

Approche descendante

- **Mémoïsation** :
  - On mémorise une valeur de la suite si c'est la première fois qu'on la rencontre.
  - Si on a déjà rencontré le calcul courant, on récupère sa valeur par un accès à la structure de stockage en $O(1)$
  - On ne lance le calcul que si la valeur voulue n'a pas déjà été calculée.
- *Approche descendante* : On commence par lancer les calculs pour les valeurs de paramètres les plus grands. Ces calculs induisent des appels avec des paramètres plus petits.
- Dans le cas qui nous occupe, le calcul de $f(n)$ amène à gérer un tableau de $n+1$ cases dont la case i contient -1 (pas encore calculé) ou $f(i)$ (calcul déjà rencontré).

Fibonacci : mémoïsation

Approche descendante

- **Mémoïsation** :
  - On mémorise une valeur de la suite si c'est la première fois qu'on la rencontre.
  - Si on a déjà rencontré le calcul courant, on récupère sa valeur par un accès à la structure de stockage en $O(1)$
  - On ne lance le calcul que si la valeur voulue n'a pas déjà été calculée.
- *Approche descendante* : On commence par lancer les calculs pour les valeurs de paramètres les plus grands. Ces calculs induisent des appels avec des paramètres plus petits.
- Dans le cas qui nous occupe, le calcul de $f(n)$ amène à gérer un tableau de $n+1$ cases dont la case i contient -1 (pas encore calculé) ou $f(i)$ (calcul déjà rencontré).
- Mais ici, un tableau n'est pas nécessaire : il suffit de mémoriser les 2 dernières valeurs.

1 Présentation

2 Exemples
- Suites de Fibonacci
- Partition équilibrée d'un tableau d'entiers positifs

Présentation du problème

- On dispose d'un (multi) ensemble d'entiers positifs E.

Présentation du problème

- On dispose d'un (multi) ensemble d'entiers positifs E.
- On souhaite déterminer une *partition équilibrée de* E (E-PE) c.a.d une partition en deux sous-ensembles E_1, E_2 tels que

Présentation du problème

- On dispose d'un (multi) ensemble d'entiers positifs E.
- On souhaite déterminer une *partition équilibrée de* E (E-PE) c.a.d une partition en deux sous-ensembles E_1, E_2 tels que
  - $E_1 \cup E_2 = E; E_1 \cap E_2 = \emptyset$ (partition)

Présentation du problème

- On dispose d'un (multi) ensemble d'entiers positifs E.
- On souhaite déterminer une *partition équilibrée de* E (E-PE) c.a.d une partition en deux sous-ensembles E_1, E_2 tels que
  - $E_1 \cup E_2 = E; E_1 \cap E_2 = \emptyset$ (partition)
  - La somme des éléments de E_1 et celle de E_2 sont les les plus proches possibles. Cela signifie que

$$\left| \sum_{x \in E_1} x - \sum_{y \in E_2} y \right| =$$

$$\min \left(\left\{ \left| \sum_{x \in E'} x - \sum_{y \in E''} y \right| \mid (E', E'') \text{ est une partition de } E \right\} \right)$$

Présentation du problème

- On dispose d'un (multi) ensemble d'entiers positifs E.
- On souhaite déterminer une *partition équilibrée de* E (E-PE) c.a.d une partition en deux sous-ensembles E_1, E_2 tels que
  - $E_1 \cup E_2 = E; E_1 \cap E_2 = \emptyset$ (partition)
  - La somme des éléments de E_1 et celle de E_2 sont les les plus proches possibles. Cela signifie que

$$\left|\sum_{x\in E_1} x - \sum_{y\in E_2} y\right| =$$

$$\min\left(\left\{\left|\sum_{x\in E'} x - \sum_{y\in E''} y\right| \mid (E', E'') \text{ est une partition de } E\right\}\right)$$

- On note S la somme des éléments de E et $S(A)$ la somme des éléments d'un sous-ensemble A. $S/2$ désigne la division euclidienne de S par 2.

Approche gloutonne

Pour $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$:

- On gère deux sous-ensembles E_1, E_2 initialisés resp. en $\{e_1\}, \emptyset$.
- On place les éléments suivants dans E_2 un à un jusqu'à ce que $S(E_2) > S(E_1)$. Les éléments suivants sont alors placés dans E_1 etc.
- Malheureusement, même en triant les éléments de E, la solution fournie n'est pas toujours optimale.

Exercice

Implanter cet algorithme. Donner sa complexité. Exhiber un exemple où la solution n'est pas optimale.

Algorithme basé sur la demi-somme

- On dispose d'un ensemble d'entiers positifs E.

Algorithme basé sur la demi-somme

- On dispose d'un ensemble d'entiers positifs E.
- Si E_1 et E_2 réalisent une E-PE, quitte à les échanger, on peut supposer $S(E_1) \leq S(E_2)$.

Algorithme basé sur la demi-somme

- On dispose d'un ensemble d'entiers positifs E.
- Si E_1 et E_2 réalisent une E-PE, quitte à les échanger, on peut supposer $S(E_1) \leq S(E_2)$.
- Comme $S(E_1) + S(E_2) = S$, on a $S(E_1) \leq \frac{S}{2} \leq S(E_2)$. Mais comme les éléments sont entiers, on obtient $S(E_1) \leq S/2 \leq S(E_2)$.

Distance à la demi-somme

- On a $S/2 = \lfloor \frac{S}{2} \rfloor$. Soit $A \subset E$ tel que :

$$\left| S/2 - \sum_{a \in A} a \right| = \min(\left\{ \left| S/2 - \sum_{x \in X} x \right| \mid X \subset E \right\}),$$

Distance à la demi-somme

- On a $S/2 = \lfloor \frac{S}{2} \rfloor$. Soit $A \subset E$ tel que :

$$\left| S/2 - \sum_{a \in A} a \right| = \min(\left\{ \left| S/2 - \sum_{x \in X} x \right| \mid X \subset E \right\}),$$

- Supposons sans perte de généralité $S(A) \leq S/2$,. Soit (F, G) partition de E telle que $S(F) \leq S(G)$. Alors $S(F) \leq S/2$.

Distance à la demi-somme

- On a $S/2 = \lfloor \frac{S}{2} \rfloor$. Soit $A \subset E$ tel que :

$$\left| S/2 - \sum_{a \in A} a \right| = \min(\left\{ \left| S/2 - \sum_{x \in X} x \right| \mid X \subset E \right\}),$$

- Supposons sans perte de généralité $S(A) \leq S/2$,. Soit (F, G) partition de E telle que $S(F) \leq S(G)$. Alors $S(F) \leq S/2$.
- On a

$$S(A) + S(E \setminus A) = S = \lfloor \frac{S}{2} \rfloor + \lceil \frac{S}{2} \rceil = S(F) + S(G)$$

Distance à la demi-somme

- On a $S/2 = \lfloor \frac{S}{2} \rfloor$. Soit $A \subset E$ tel que :

$$\left| S/2 - \sum_{a \in A} a \right| = \min(\left\{ \left| S/2 - \sum_{x \in X} x \right| \mid X \subset E \right\}),$$

- Supposons sans perte de généralité $S(A) \leq S/2$,. Soit (F, G) partition de E telle que $S(F) \leq S(G)$. Alors $S(F) \leq S/2$.
- On a

$$S(A) + S(E \setminus A) = S = \lfloor \frac{S}{2} \rfloor + \lceil \frac{S}{2} \rceil = S(F) + S(G)$$

- Il vient (en n'oubliant pas que A réalise la meilleure distance à $S/2$) :

$$0 \leq \lfloor \frac{S}{2} \rfloor - S(A) = -\lceil \frac{S}{2} \rceil + S(E \setminus A) \leq \lfloor \frac{S}{2} \rfloor - S(F) = -\lceil \frac{S}{2} \rceil + S(G)$$

Distance à la demi-somme

- On a $S/2 = \lfloor \frac{S}{2} \rfloor$. Soit $A \subset E$ tel que :

$$\left| S/2 - \sum_{a \in A} a \right| = \min(\left\{ \left| S/2 - \sum_{x \in X} x \right| \mid X \subset E \right\}),$$

- Supposons sans perte de généralité $S(A) \leq S/2$,. Soit (F, G) partition de E telle que $S(F) \leq S(G)$. Alors $S(F) \leq S/2$.
- On a

$$S(A) + S(E \setminus A) = S = \lfloor \frac{S}{2} \rfloor + \lceil \frac{S}{2} \rceil = S(F) + S(G)$$

- Il vient (en n'oubliant pas que A réalise la meilleure distance à $S/2$) :

$$0 \leq \lfloor \frac{S}{2} \rfloor - S(A) = -\lceil \frac{S}{2} \rceil + S(E \setminus A) \leq \lfloor \frac{S}{2} \rfloor - S(F) = -\lceil \frac{S}{2} \rceil + S(G)$$

- Alors $S(F) \leq S(A) \leq S(E \setminus A) \leq S(G)$. Et donc $|S(E \setminus A) - S(A)| \leq |S(G) - S(F)|$

Distance à la demi-somme

- On a $S/2 = \lfloor \frac{S}{2} \rfloor$. Soit $A \subset E$ tel que :

$$\left| S/2 - \sum_{a \in A} a \right| = \min\left(\left\{ \left| S/2 - \sum_{x \in X} x \right| \mid X \subset E \right\} \right),$$

- Supposons sans perte de généralité $S(A) \leq S/2$,. Soit (F, G) partition de E telle que $S(F) \leq S(G)$. Alors $S(F) \leq S/2$.
- On a

$$S(A) + S(E \setminus A) = S = \lfloor \frac{S}{2} \rfloor + \lceil \frac{S}{2} \rceil = S(F) + S(G)$$

- Il vient (en n'oubliant pas que A réalise la meilleure distance à $S/2$) :

$$0 \leq \lfloor \frac{S}{2} \rfloor - S(A) = -\lceil \frac{S}{2} \rceil + S(E \setminus A) \leq \lfloor \frac{S}{2} \rfloor - S(F) = -\lceil \frac{S}{2} \rceil + S(G)$$

- Alors $S(F) \leq S(A) \leq S(E \setminus A) \leq S(G)$. Et donc $|S(E \setminus A) - S(A)| \leq |S(G) - S(F)|$
- De même si $S(A) \geq S/2$. Ainsi : $(A, E \setminus A)$ réalise une E-PE.

Solution par programmation dynamique

Méthode descendante

- On cherche (E_1, E_2), partition équilibrée de E

Solution par programmation dynamique

Méthode descendante

- On cherche (E_1, E_2), partition équilibrée de E
- La remarque 2 du slide précédent suggère de travailler avec a) la demi-somme des éléments de E et b) l'ensemble E_1 (puisqu'on trouve alors E_2 facilement).

Solution par programmation dynamique

Méthode descendante

- On cherche (E_1, E_2), partition équilibrée de E
- La remarque 2 du slide précédent suggère de travailler avec a) la demi-somme des éléments de E et b) l'ensemble E_1 (puisqu'on trouve alors E_2 facilement).
- Agorithme récursif : On gère un ensemble E et la demi-somme $S/2$ des éléments de E. On cherche à construire E_1.
  Prendre $e \in E$ et calculer la distance $S/2 - S(E_1)$ dans 2 cas :

Solution par programmation dynamique

Méthode descendante

- On cherche (E_1, E_2), partition équilibrée de E
- La remarque 2 du slide précédent suggère de travailler avec a) la demi-somme des éléments de E et b) l'ensemble E_1 (puisqu'on trouve alors E_2 facilement).
- Agorithme récursif : On gère un ensemble E et la demi-somme $S/2$ des éléments de E. On cherche à construire E_1.
  Prendre $e \in E$ et calculer la distance $S/2 - S(E_1)$ dans 2 cas :
  - En mettant e dans E_1. Cela revient à ajouter e à la solution au problème lorsque $E = E \setminus \{e\}$ et $S' = S/2 - e$

Solution par programmation dynamique

Méthode descendante

- On cherche (E_1, E_2), partition équilibrée de E
- La remarque 2 du slide précédent suggère de travailler avec a) la demi-somme des éléments de E et b) l'ensemble E_1 (puisqu'on trouve alors E_2 facilement).
- Agorithme récursif : On gère un ensemble E et la demi-somme $S/2$ des éléments de E. On cherche à construire E_1.
  Prendre $e \in E$ et calculer la distance $S/2 - S(E_1)$ dans 2 cas :
  - En mettant e dans E_1. Cela revient à ajouter e à la solution au problème lorsque $E = E \setminus \{e\}$ et $S' = S/2 - e$
  - En ne mettant pas e dans E_1. On calcule la solution au problème lorsque $E = E \setminus \{e\}$ et $S/2$ est inchangé.

Solution par programmation dynamique

Méthode descendante

- On cherche (E_1, E_2), partition équilibrée de E
- La remarque 2 du slide précédent suggère de travailler avec a) la demi-somme des éléments de E et b) l'ensemble E_1 (puisqu'on trouve alors E_2 facilement).
- Agorithme récursif : On gère un ensemble E et la demi-somme $S/2$ des éléments de E. On cherche à construire E_1.
  Prendre $e \in E$ et calculer la distance $S/2 - S(E_1)$ dans 2 cas :
  - En mettant e dans E_1. Cela revient à ajouter e à la solution au problème lorsque $E = E \setminus \{e\}$ et $S' = S/2 - e$
  - En ne mettant pas e dans E_1. On calcule la solution au problème lorsque $E = E \setminus \{e\}$ et $S/2$ est inchangé.

  Choisir la meilleure des 2 options : celle qui améliore la distance de la somme des éléments de E_1 à la demi-somme $S/2$.

Solution par programmation dynamique

Méthode descendante

Comprenons la présentation précédente :

- On pose $S/2$ la demi-somme.

Solution par programmation dynamique

Méthode descendante

Comprenons la présentation précédente :

- On pose $S/2$ la demi-somme.
- On veut rendre minimum

$$X = |(\sum_{x \in E_1} x) - S/2|$$

Solution par programmation dynamique

Méthode descendante

Comprenons la présentation précédente :

- On pose $S/2$ la demi-somme.
- On veut rendre minimum

$$X = |(\sum_{x \in E_1} x) - S/2|$$

- Si $e \in E_1$ alors

$$X = |e + (\sum_{x \in E_1, x \neq e} x) - S/2| = |(\sum_{x \in E_1, x \neq e} x) - (S/2 - e)|$$

Solution par programmation dynamique

Méthode descendante

Comprenons la présentation précédente :

- On pose $S/2$ la demi-somme.
- On veut rendre minimum

$$X = |(\sum_{x \in E_1} x) - S/2|$$

- Si $e \in E_1$ alors

$$X = |e + (\sum_{x \in E_1, x \neq e} x) - S/2| = |(\sum_{x \in E_1, x \neq e} x) - (S/2 - e)|$$

- Si $e \notin E_1$ $X = |(\sum_{x \in E_1, x \neq e} x) - S/2|$

Solution par programmation dynamique

Méthode descendante

Exercice

Les multi-ensemble de nombres sont implémentés par des listes.

1. Écrire une fonction `partition : int list -> int list` qui renvoie un ensemble $A \subset E$ telle que $|S(A) - S/2|$ soit minimal. On ne cherche pas à mémoriser les résultats intermédiaires.
2. Estimer la complexité (on peut se contenter de la minorer) en fonction de $|E|$.

Solution par programmation dynamique

Méthode ascendante avec tableau de bouléen

$E = \{e_0, \ldots, e_{n-1}\}$, multi-ensemble de nombres entiers positifs,
$S = \sum_{e \in E} e$.

- On construit une matrice de bouléens T de taille $(n+1) \times (S+1)$

Solution par programmation dynamique

Méthode ascendante avec tableau de bouléen

$E = \{e_0, \ldots, e_{n-1}\}$, multi-ensemble de nombres entiers positifs,
$S = \sum_{e \in E} e$.

- On construit une matrice de bouléens T de taille $(n+1) \times (S+1)$
- On fait en sorte que le coefficient $T_{i,j}$ $(i \geq 0, j \geq 0)$ soit vrai si et seulement si il existe un sous-ensemble de $\{e_k \mid k \leq i-1\}$ dont la somme des éléments vaut j.

Solution par programmation dynamique

Méthode ascendante avec tableau de bouléen

$E = \{e_0, \ldots, e_{n-1}\}$, multi-ensemble de nombres entiers positifs,
$S = \sum_{e \in E} e$.

- On construit une matrice de bouléens T de taille $(n+1) \times (S+1)$
- On fait en sorte que le coefficient $T_{i,j}$ $(i \geq 0, j \geq 0)$ soit vrai si et seulement si il existe un sous-ensemble de $\{e_k \mid k \leq i-1\}$ dont la somme des éléments vaut j.
- On cherche une relation de récurrence qui construit $T_{i,j}$ connaissant les $T_{i',j'}$ pour $(i',j') < (i,j)$ au sens lexicographique.

Solution par programmation dynamique

Méthode ascendante avec tableau de bouléen

$E = \{e_0, \ldots, e_{n-1}\}$, multi-ensemble de nombres entiers positifs ($|E| = n$).

- Ligne 0 : Pour $k \geq 0$, $T_{0,k}$ désigne la possibilité pour que la somme des éléments de l'ensemble $\{e_k \mid k \leq 0 - 1\} = \emptyset$ vale k. Ainsi $T_{0,k}$ est faux sauf si $k = 0$.

Solution par programmation dynamique

Méthode ascendante avec tableau de bouléen

$E = \{e_0, \ldots, e_{n-1}\}$, multi-ensemble de nombres entiers positifs ($|E| = n$).

- Ligne 0 : Pour $k \geq 0$, $T_{0,k}$ désigne la possibilité pour que la somme des éléments de l'ensemble $\{e_k \mid k \leq 0 - 1\} = \emptyset$ vale k. Ainsi $T_{0,k}$ est faux sauf si $k = 0$.
- Pour $i \geq 0$, T_{i+1}, j est vrai si et seulement si il existe un sous-ensemble de $\{e_0, \ldots, e_i\}$ dont la somme des éléments vaut j. Ceci se décompose en :

Solution par programmation dynamique

Méthode ascendante avec tableau de bouléen

$E = \{e_0, \ldots, e_{n-1}\}$, multi-ensemble de nombres entiers positifs ($|E| = n$).

- Ligne 0 : Pour $k \geq 0$, $T_{0,k}$ désigne la possibilité pour que la somme des éléments de l'ensemble $\{e_k \mid k \leq 0 - 1\} = \emptyset$ vale k. Ainsi $T_{0,k}$ est faux sauf si $k = 0$.
- Pour $i \geq 0$, T_{i+1}, j est vrai si et seulement si il existe un sous-ensemble de $\{e_0, \ldots, e_i\}$ dont la somme des éléments vaut j. Ceci se décompose en :
  - Ou bien il existe un sous-ensemble de $\{e_0, \ldots, e_{i-1}\}$ dont la somme des éléments vaut j. Ceci est équivalent à « $T_{i,j}$ est vrai ».

Solution par programmation dynamique

Méthode ascendante avec tableau de bouléen

$E = \{e_0, \ldots, e_{n-1}\}$, multi-ensemble de nombres entiers positifs ($|E| = n$).

- Ligne 0 : Pour $k \geq 0$, $T_{0,k}$ désigne la possibilité pour que la somme des éléments de l'ensemble $\{e_k \mid k \leq 0 - 1\} = \emptyset$ vale k. Ainsi $T_{0,k}$ est faux sauf si $k = 0$.
- Pour $i \geq 0$, T_{i+1}, j est vrai si et seulement si il existe un sous-ensemble de $\{e_0, \ldots, e_i\}$ dont la somme des éléments vaut j. Ceci se décompose en :
  - Ou bien il existe un sous-ensemble de $\{e_0, \ldots, e_{i-1}\}$ dont la somme des éléments vaut j. Ceci est équivalent à « $T_{i,j}$ est vrai ».
  - Ou bien, il existe un sous-ensemble de $\{e_0, \ldots, e_{i-1}\}$ dont la somme des éléments vaut $j - e_i$ (chose impossible si $j < e_i$). Ceci est équivalent à « $T_{i,j-e_i}$ est vrai » lorsque $j \geq e_i$.

Solution par programmation dynamique

Méthode ascendante avec tableau de bouléen

$E = \{e_0, \ldots, e_{n-1}\}$, multi-ensemble de nombres entiers positifs ($|E| = n$).

- Ligne 0 : Pour $k \geq 0$, $T_{0,k}$ désigne la possibilité pour que la somme des éléments de l'ensemble $\{e_k \mid k \leq 0 - 1\} = \emptyset$ vale k. Ainsi $T_{0,k}$ est faux sauf si $k = 0$.
- Pour $i \geq 0$, T_{i+1}, j est vrai si et seulement si il existe un sous-ensemble de $\{e_0, \ldots, e_i\}$ dont la somme des éléments vaut j. Ceci se décompose en :
  - Ou bien il existe un sous-ensemble de $\{e_0, \ldots, e_{i-1}\}$ dont la somme des éléments vaut j. Ceci est équivalent à « $T_{i,j}$ est vrai ».
  - Ou bien, il existe un sous-ensemble de $\{e_0, \ldots, e_{i-1}\}$ dont la somme des éléments vaut $j - e_i$ (chose impossible si $j < e_i$). Ceci est équivalent à « $T_{i,j-e_i}$ est vrai » lorsque $j \geq e_i$.
- Relation de récurrence : pour $i \geq 1, j \geq 0$, $T_{i+1,j}$ est équivalent à :

$$T_{i,j} \text{ ou } (j \geq e_i \text{ et } T_{i,j-e_i})$$

Code : construction du tableau de bouléens

Exercice

Écrire la fonction

`tableau : int array -> bool array array * int` telle que

`tableau e` renvoie le tuple **T,m** où T est décrit au transparent précédent et m est la plus grande somme d'éléments de E plus petite que $S/2$.
Évaluer la complexité de votre fonction.

Construction de la partition équilibrée

Une fois trouvés le tableau de bouléens T et la somme m (dernière colonne vraie $\leq \frac{S}{2}$ en ligne n), on construit E_1 récursivement en lui ajoutant ou pas l'élément courant (*i.e.* l'élément concerné par la ligne courante de T).

- On part de $T_{n,m}$ (qui est Vrai) et $E_1 = \emptyset$.

Construction de la partition équilibrée

Une fois trouvés le tableau de bouléens T et la somme m (dernière colonne vraie $\leq \frac{S}{2}$ en ligne n), on construit E_1 récursivement en lui ajoutant ou pas l'élément courant (*i.e.* l'élément concerné par la ligne courante de T).

- On part de $T_{n,m}$ (qui est Vrai) et $E_1 = \emptyset$.
- On parcourt une suite $(T_{i,m_i})_{i=n,n-1,\ldots 1}$ de coefficients avec $m_i \downarrow$ et $m_n = m$.
  C'est donc une suite dont les indices sont positifs et décroissants strictement au sens lexicographique, ce qui assure la terminaison de la récursion.

Construction de la partition équilibrée

Une fois trouvés le tableau de bouléens T et la somme m (dernière colonne vraie $\leq \frac{S}{2}$ en ligne n), on construit E_1 récursivement en lui ajoutant ou pas l'élément courant (*i.e.* l'élément concerné par la ligne courante de T).

- On part de $T_{n,m}$ (qui est Vrai) et $E_1 = \emptyset$.
- On parcourt une suite $(T_{i,m_i})_{i=n,n-1,\ldots 1}$ de coefficients avec $m_i \downarrow$ et $m_n = m$.
  C'est donc une suite dont les indices sont positifs et décroissants strictement au sens lexicographique, ce qui assure la terminaison de la récursion.
- Invariant « T_{i,m_i} est vrai ». Critère de déplacement dans la matrice :

Construction de la partition équilibrée

Une fois trouvés le tableau de bouléens T et la somme m (dernière colonne vraie $\leq \frac{S}{2}$ en ligne n), on construit E_1 récursivement en lui ajoutant ou pas l'élément courant (*i.e.* l'élément concerné par la ligne courante de T).

- On part de $T_{n,m}$ (qui est Vrai) et $E_1 = \emptyset$.
- On parcourt une suite $(T_{i,m_i})_{i=n,n-1,\ldots 1}$ de coefficients avec $m_i \downarrow$ et $m_n = m$.
  C'est donc une suite dont les indices sont positifs et décroissants strictement au sens lexicographique, ce qui assure la terminaison de la récursion.
- Invariant « T_{i,m_i} est vrai ». Critère de déplacement dans la matrice :
  - Si T_{i-1,m_i} est vrai, alors on peut trouver un sous-ensemble de $\{e_0, \ldots, e_{i-2}\}$ qui a pour somme m_i. Donc E_1 peut ne pas contenir e_{i-1} : il reste inchangé.

Construction de la partition équilibrée

Une fois trouvés le tableau de bouléens T et la somme m (dernière colonne vraie $\leq \frac{S}{2}$ en ligne n), on construit E_1 récursivement en lui ajoutant ou pas l'élément courant (*i.e.* l'élément concerné par la ligne courante de T).

- On part de $T_{n,m}$ (qui est Vrai) et $E_1 = \emptyset$.
- On parcourt une suite $(T_{i,m_i})_{i=n,n-1,\ldots 1}$ de coefficients avec $m_i \downarrow$ et $m_n = m$.
  C'est donc une suite dont les indices sont positifs et décroissants strictement au sens lexicographique, ce qui assure la terminaison de la récursion.
- Invariant « T_{i,m_i} est vrai ». Critère de déplacement dans la matrice :
  - Si T_{i-1,m_i} est vrai, alors on peut trouver un sous-ensemble de $\{e_0, \ldots, e_{i-2}\}$ qui a pour somme m_i. Donc E_1 peut ne pas contenir e_{i-1} : il reste inchangé.
  - Sinon c'est que $T_{i-1,m_i-e_{i-1}}$ est vrai. On peut trouver un sous-ensemble de $\{e_0, \ldots, e_{i-2}\}$ qui a pour somme $m_i - e_{i-1}$. On ajoute donc e_{i-1} à E_1.

Construction de la partition équilibrée

Code

Exercice

Écrire la fonction `partitition : int array -> int list` telle que `partitition e` renvoie sous forme de liste l'ensemble E_1.
Donner sa complexité.