Induction structurelle

Ivan Noyer

Lycée Thiers

1. Présentation

2. Ordre structurel
   - Ordre bien fondé
   - Taille et ordre

3. Principe d'induction

Objets inductifs

Présentation informelle.

- Les objets *inductifs* sont des objets construits progressivement à partir d'objets de même nature.

Objets inductifs

Présentation informelle.

- Les objets *inductifs* sont des objets construits progressivement à partir d'objets de même nature.
- Les objets inductifs sont décrits par deux choses :

Objets inductifs

Présentation informelle.

- Les objets *inductifs* sont des objets construits progressivement à partir d'objets de même nature.
- Les objets inductifs sont décrits par deux choses :
  - un ou plusieurs objets de base (qui forment le point de départ de toute construction) ;

Objets inductifs

Présentation informelle.

- Les objets *inductifs* sont des objets construits progressivement à partir d'objets de même nature.
- Les objets inductifs sont décrits par deux choses :
  - un ou plusieurs objets de base (qui forment le point de départ de toute construction) ;
  - une ou plusieurs règles de combinaisons (qui permettent de former des objets plus grands)

Objets inductifs

Présentation informelle.

- Les objets *inductifs* sont des objets construits progressivement à partir d'objets de même nature.
- Les objets inductifs sont décrits par deux choses :
  - un ou plusieurs objets de base (qui forment le point de départ de toute construction) ;
  - une ou plusieurs règles de combinaisons (qui permettent de former des objets plus grands)
- Exemple : les constructions en Lego :

Objets inductifs

Présentation informelle.

- Les objets *inductifs* sont des objets construits progressivement à partir d'objets de même nature.
- Les objets inductifs sont décrits par deux choses :
  - un ou plusieurs objets de base (qui forment le point de départ de toute construction) ;
  - une ou plusieurs règles de combinaisons (qui permettent de former des objets plus grands)
- Exemple : les constructions en Lego :
  - les briques et les plaques sont des constructions de base ;

Objets inductifs

Présentation informelle.

- Les objets *inductifs* sont des objets construits progressivement à partir d'objets de même nature.
- Les objets inductifs sont décrits par deux choses :
  - un ou plusieurs objets de base (qui forment le point de départ de toute construction) ;
  - une ou plusieurs règles de combinaisons (qui permettent de former des objets plus grands)
- Exemple : les constructions en Lego :
  - les briques et les plaques sont des constructions de base ;
  - A partir de deux constructions en Lego, on obtient une troisième en les emboîtant.

Exemple des listes en OCaml

- Cas de base : la liste vide `[]` ;

Exemple des listes en OCaml

- Cas de base : la liste vide `[]` ;
- Règle de combinaison : si `l` est une liste et `e` un élément, alors `e::l` est un e nouvelle liste qui contient un élément de plus que la queue `l`.

Exemple : les entiers de Peano

- Cas de base : L'entier zéro, noté Z est un nombre entier naturel.

Exemple : les entiers de Peano

- Cas de base : L'entier zéro, noté Z est un nombre entier naturel.
- Règle de construction : si n est un entier naturel, alors son successeur, noté $\mathbf{S}(n)$ est encore un entier naturel.

Exemple : les entiers de Peano

- Cas de base : L'entier zéro, noté Z est un nombre entier naturel.
- Règle de construction : si n est un entier naturel, alors son successeur, noté $\mathbf{S}(n)$ est encore un entier naturel.
- Exemple : 3 se note $\mathbf{S}(\mathbf{S}(\mathbf{S}(Z)))$.

Fonction sur les termes

Pour définir une fonction sur les termes, on se donne autant d'équations que de constructeurs.

- On définit l'addition $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} Z + m & = & m \\ S(n) + m & = & S(n+m) \end{cases}$$

Fonction sur les termes

Pour définir une fonction sur les termes, on se donne autant d'équations que de constructeurs.

- On définit l'addition $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} Z + m & = & m \\ S(n) + m & = & S(n+m) \end{cases}$$

- Exemple (en désignant Z par 0, 2 par $S(S(Z))$ etc.

$$\begin{aligned} 2+3 &= S(1)+3 \\ &= S(1+3) = S(S(0)+3) \\ &= S(S(0+3)) \\ &= S(S(3)) = 5. \end{aligned}$$

Constructeurs

- On utilise une syntaxe proche de OCaml.

Constructeurs

- On utilise une syntaxe proche de OCaml.
- A chaque objet de base et chaque manière de construire un nouvel objet à partir d'objets plus petits sont associés un symbole appelé *constructeur*.

Constructeurs

- On utilise une syntaxe proche de OCaml.
- A chaque objet de base et chaque manière de construire un nouvel objet à partir d'objets plus petits sont associés un symbole appelé *constructeur*.
- Tout objet est alors construit comme une combinaison d'applications explicites de ces constructeurs.

Constructeurs, arités, termes

Définition

Un *constructeur* est un symbole attendant un nombre fixe d'arguments. Ce nombre est l'*arité du constructeur*.
Pour définir un ensemble E d'objets inductifs, on fournit une *signature*, c.a.d un ensemble de constructeurs. Les éléments de E, appelés *termes* sont alors construits en utilisant exclusivement la règle suivante :

- Si c est un constructeur d'arité n et si $t_1, \ldots, t_n$ sont n termes alors l'application

$$c(t_1, \ldots, t_n) \text{ forme un terme.}$$

Sous-termes immédiats

- Si $t = c(t_1, \ldots, t_n)$, on dit que t_1 (ou t_2 etc.) est un sous-terme *immédiat* de t.

Sous-termes immédiats

- Si $t = c(t_1, \ldots, t_n)$, on dit que t_1 (ou t_2 etc.) est un sous-terme *immédiat* de t.
- Dans la notation

$$t = c(c(t_2, t_3), t_1)$$

  t_1 est un sous-terme immédiat de t mais t_2, t_3 sont des sous-termes (non immédiats)

Cas de bases, cas de combinaisons

- Un constructeur c d'arité zéro est lui-même un terme. Un tel constructeur est appelé une *constante* et forme un cas de base.

Cas de bases, cas de combinaisons

- Un constructeur c d'arité zéro est lui-même un terme. Un tel constructeur est appelé une *constante* et forme un cas de base.
- un constructeur c d'arité non nulle doit nécessairement être appliqué à plusieurs termes déjà construits pour former un nouveau terme. Cela représente un cas de combinaison.

Cas de bases, cas de combinaisons

- Un constructeur c d'arité zéro est lui-même un terme. Un tel constructeur est appelé une *constante* et forme un cas de base.
- un constructeur c d'arité non nulle doit nécessairement être appliqué à plusieurs termes déjà construits pour former un nouveau terme. Cela représente un cas de combinaison.
- Un constructeur n-aire est un constructeur d'arité n. On parle de constructeurs *unaires*, *binaires*, *ternaires* pour les arités $1, 2, 3$

Structure des termes

Définition

Les termes t_1 à t_n utilisés pour construire un terme $t = c(t_1, \ldots, t_n)$ sont appelés sous-termes immédiats de t.
Deux termes sont égaux si et seulement si ils sont construits de la même façon, c'est à dire à partir des mêmes sous-termes, combinés par les mêmes constructeurs

Remarque

- Cette égalité est syntaxique.
- Contre-exemple : L'égalité dans $\mathbb{Q}$ n'est pas seulement syntaxique. En effet $\frac{6}{4}$ est égal à $\frac{3}{2}$.

Précisions

- Sauf mention du contraire, on ne considère que des termes finis : ceux qui peuvent être formés à partir d'un nombre fini d'applications de constructeurs.

Précisions

- Sauf mention du contraire, on ne considère que des termes finis : ceux qui peuvent être formés à partir d'un nombre fini d'applications de constructeurs.
- Un ensemble inductif E dont la signature contient au moins un symbole de constante est non vide.

Précisions

- Sauf mention du contraire, on ne considère que des termes finis : ceux qui peuvent être formés à partir d'un nombre fini d'applications de constructeurs.
- Un ensemble inductif E dont la signature contient au moins un symbole de constante est non vide.
- Une signature peut très bien contenir une infinité de symboles (mais les termes n'en utilisent qu'un nombre fini).

Signature typée

- Parfois, on impose que chaque élément d'un constructeur soit d'une nature précise.

Signature typée

- Parfois, on impose que chaque élément d'un constructeur soit d'une nature précise.
- Par exemple dans `e::l`, on s'attend à ce que `e` et `l` aient ds types différents. Le premier est de type élément et le second de type liste d'éléments.

Signature typée

- Parfois, on impose que chaque élément d'un constructeur soit d'une nature précise.
- Par exemple dans `e::l`, on s'attend à ce que `e` et `l` aient ds types différents. Le premier est de type élément et le second de type liste d'éléments.
- On peut donc utiliser une notation de type

$$c \ : \ E_1 \times \cdots \times E_n \to E$$

pour indiquer qu'un constructeur c d'arité n attend des arguments pris dans les ensembles respectifs $E_1, \ldots, E_n$.

Signature typée

- Parfois, on impose que chaque élément d'un constructeur soit d'une nature précise.
- Par exemple dans `e::l`, on s'attend à ce que `e` et `l` aient ds types différents. Le premier est de type élément et le second de type liste d'éléments.
- On peut donc utiliser une notation de type

$$c \,:\, E_1 \times \cdots \times E_n \to E$$

  pour indiquer qu'un constructeur c d'arité n attend des arguments pris dans les ensembles respectifs $E_1, \ldots, E_n$.
- Avec cette convention, $c \,:\, E$ désigne que c est une constante de l'ensemble E.

1. Présentation

2. Ordre structurel
   - Ordre bien fondé
   - Taille et ordre

3. Principe d'induction

Relation d'ordre

Définition

Soit E un ensemble ; une relation interne $\leq$ sur E est une relation d'ordre si pour tous x, y et z éléments de E :

- $x \leq x$ (réflexivité)
- $(x \leq y$ et $y \leq x) \implies x = y$ (antisymétrie)
- $(x \leq y$ et $y \leq z) \implies x \leq z$ (transitivité)

Ensembles bien fondés

Définition

- Un ensemble E est dit *bien fondé* s'il est muni d'une relation d'ordre $\preceq$ telle qu'il n'existe pas de suite [a] strictement décroissante de cet ensemble.

a. Rappel : une suite sur E est simplement une application $f : \mathbb{N} \to E$

Ensembles bien fondés

Définition

- Un ensemble E est dit *bien fondé* s'il est muni d'une relation d'ordre $\preceq$ telle qu'il n'existe pas de suite [a] strictement décroissante de cet ensemble.
- Un ensemble est dit *bien ordonné*, si il est bien fondé et si, de plus, la relation d'ordre est totale.

---

a. Rappel : une suite sur E est simplement une application $f : \mathbb{N} \to E$

Ensembles bien ordonnés/fondés

Exemples

- $\mathbb{N}$ muni de $\leq$ usuel est bien ordonné,

Ensembles bien ordonnés/fondés

Exemples

- $\mathbb{N}$ muni de $\leq$ usuel est bien ordonné,
- $\mathbb{N}^2$ muni de l'ordre lexicographique est bien ordonné

$$(a, b) \preceq_L (a', b') \iff (a < a') \vee (a = a' \wedge b \leq b')$$

Ensembles bien ordonnés/fondés

Exemples

- $\mathbb{N}$ muni de $\leq$ usuel est bien ordonné,
- $\mathbb{N}^2$ muni de l'ordre lexicographique est bien ordonné

$$(a, b) \preceq_L (a', b') \iff (a < a') \vee (a = a' \wedge b \leq b')$$

- $\mathbb{N}^2$ muni de l'ordre produit est bien fondé

$$(a, b) \preceq_P (a', b') \iff (a \leq a') \wedge (b \leq b')$$

Relation non totale.

Ensembles bien ordonnés/fondés

Exemples

- $\mathbb{N}$ muni de $\leq$ usuel est bien ordonné,
- $\mathbb{N}^2$ muni de l'ordre lexicographique est bien ordonné

$$(a, b) \preceq_L (a', b') \iff (a < a') \vee (a = a' \wedge b \leq b')$$

- $\mathbb{N}^2$ muni de l'ordre produit est bien fondé

$$(a, b) \preceq_P (a', b') \iff (a \leq a') \wedge (b \leq b')$$

  Relation non totale.
- $\mathbb{Z}$ muni de l'ordre usuel n'est pas bien fondé $(-1, -2, -3 \ldots$ est infini strictement décroissante).

Bon ordre et élément minimal

Proposition

Un ensemble ordonné E est bien ordonné si et seulement si toutes les parties non vides de E admettent un élément minimal unique.

Par *élément minimal*, on entend un élément plus petit que tous les autres.

Bon ordre et élément minimal

Si E est bien ordonné Soit $A \subset E$ une partie non vide sans élément minimal. Prenons $e_0 \in A$.

Bon ordre et élément minimal

Si E est bien ordonné Soit $A \subset E$ une partie non vide sans élément minimal. Prenons $e_0 \in A$.

- Puisque e_0 n'est pas minimal, on peut trouver $e_1 \in A$ tel que $\neg(e_1 \geq e_0)$, c'est à dire $e_1 < e_0$ puisque l'ordre est total.

Bon ordre et élément minimal

Si E est bien ordonné Soit $A \subset E$ une partie non vide sans élément minimal. Prenons $e_0 \in A$.

- Puisque e_0 n'est pas minimal, on peut trouver $e_1 \in A$ tel que $\neg(e_1 \geq e_0)$, c'est à dire $e_1 < e_0$ puisque l'ordre est total.
- De proche en proche on construit un n-uplet $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ de valeurs de A donc de E strictement décroissantes aussi longue qu'on veut. Contradiction avec « bien fondé ». A possède donc un élément minimal.

Bon ordre et élément minimal

Si E est bien ordonné Soit $A \subset E$ une partie non vide sans élément minimal. Prenons $e_0 \in A$.

- Puisque e_0 n'est pas minimal, on peut trouver $e_1 \in A$ tel que $\neg(e_1 \geq e_0)$, c'est à dire $e_1 < e_0$ puisque l'ordre est total.
- De proche en proche on construit un n-uplet $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ de valeurs de A donc de E strictement décroissantes aussi longue qu'on veut. Contradiction avec « bien fondé ». A possède donc un élément minimal.
- L'unicité de l'élément minimal vient de l'antisymétrie.
  Si e, e' sont minimaux dans A, $e \leq e'$ et $e' \leq e$, donc $e = e'$ par antisymétrie.

Bon ordre et élément minimal

Si toute partie a un élément minimal L'ordre est total car toute partie à deux éléments admet un élément minimal. L'un est donc plus petit que l'autre.

Bon ordre et élément minimal

Si toute partie a un élément minimal L'ordre est total car toute partie à deux éléments admet un élément minimal. L'un est donc plus petit que l'autre.

- Considérons la suite $(u_n)_n$ d'éléments de E. Posons $U = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset E$.

Bon ordre et élément minimal

Si toute partie a un élément minimal L'ordre est total car toute partie à deux éléments admet un élément minimal. L'un est donc plus petit que l'autre.

- Considérons la suite $(u_n)_n$ d'éléments de E. Posons $U = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset E$.
- Comme $U \neq \emptyset$, U admet un élément minimal, disons, u_k. Si la suite est strictement décroissante, alors $u_k > u_{k+1}$, ce qui contredit la minimalité.

Bon ordre et élément minimal

Si toute partie a un élément minimal L'ordre est total car toute partie à deux éléments admet un élément minimal. L'un est donc plus petit que l'autre.

- Considérons la suite $(u_n)_n$ d'éléments de E. Posons $U = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset E$.
- Comme $U \neq \emptyset$, U admet un élément minimal, disons, u_k. Si la suite est strictement décroissante, alors $u_k > u_{k+1}$, ce qui contredit la minimalité.
- Il n'y a pas de suite strictement décroissante dans l'ensemble : il est bien fondé.

Eléments sans prédécesseurs

Définition-Propriété

Dans toute partie d'un ensemble bien fondé, il y a un ou des éléments qui ne sont plus grand qu'aucun autre de cette partie. On les appelle *éléments sans prédécesseur*.

- Soit E bien fondé et e_0, F tels que $e_0 \in F \subset E$. Si e_0 est sans prédécesseur dans F, alors on est content.

Eléments sans prédécesseurs

Définition-Propriété

Dans toute partie d'un ensemble bien fondé, il y a un ou des éléments qui ne sont plus grand qu'aucun autre de cette partie. On les appelle *éléments sans prédécesseur*.

- Soit E bien fondé et e_0, F tels que $e_0 \in F \subset E$. Si e_0 est sans prédécesseur dans F, alors on est content.
- Sinon, on peut trouver $e_1 < e_0$ dans F.

Eléments sans prédécesseurs

Définition-Propriété

Dans toute partie d'un ensemble bien fondé, il y a un ou des éléments qui ne sont plus grand qu'aucun autre de cette partie. On les appelle *éléments sans prédécesseur*.

- Soit E bien fondé et e_0, F tels que $e_0 \in F \subset E$. Si e_0 est sans prédécesseur dans F, alors on est content.
- Sinon, on peut trouver $e_1 < e_0$ dans F.
- De proche en proche on construit une suite $e_0 > e_1 > \cdots > e_n$ dans F.

Eléments sans prédécesseurs

Définition-Propriété

Dans toute partie d'un ensemble bien fondé, il y a un ou des éléments qui ne sont plus grand qu'aucun autre de cette partie. On les appelle *éléments sans prédécesseur*.

- Soit E bien fondé et e_0, F tels que $e_0 \in F \subset E$. Si e_0 est sans prédécesseur dans F, alors on est content.
- Sinon, on peut trouver $e_1 < e_0$ dans F.
- De proche en proche on construit une suite $e_0 > e_1 > \cdots > e_n$ dans F.
- Mais cette suite ne se prolonge pas indéfiniment car l'ordre est bien fondé. Donc il existe $e_k \in F$ sans prédécesseur.

Eléments sans prédécesseurs

Définition-Propriété

Dans toute partie d'un ensemble bien fondé, il y a un ou des éléments qui ne sont plus grand qu'aucun autre de cette partie. On les appelle *éléments sans prédécesseur*.

- Soit E bien fondé et e_0, F tels que $e_0 \in F \subset E$. Si e_0 est sans prédécesseur dans F, alors on est content.
- Sinon, on peut trouver $e_1 < e_0$ dans F.
- De proche en proche on construit une suite $e_0 > e_1 > \cdots > e_n$ dans F.
- Mais cette suite ne se prolonge pas indéfiniment car l'ordre est bien fondé. Donc il existe $e_k \in F$ sans prédécesseur.
- Réciproquement Si toute partie d'un ensemble ordonné admet des éléments sans prédécesseur, l'ensemble est bien fondé. Preuve : adapter le transparent précédent.

Taille

Définition

La *taille* d'un terme est le nombre de constructeurs qui le composent. Si t est un terme, on note $|t|$ sa taille.

Exemple

Pour les entiers de Peano, la taille de Z est 1, celle de $S(S(S(Z)))$ est 4.

Taille

- La définition de la taille peut subir quelques aménagements suivant les contextes.

Taille

- La définition de la taille peut subir quelques aménagements suivant les contextes.
- Par exemple, pour les listes on a coutume de dire que `[]` est de taille 0 et non 1, et que la taille de `[1;2]` (qui est en fait `1 :: 2 :: []`) est 2 et non 3.

Taille

- La définition de la taille peut subir quelques aménagements suivant les contextes.
- Par exemple, pour les listes on a coutume de dire que `[]` est de taille 0 et non 1, et que la taille de `[1;2]` (qui est en fait `1 :: 2 :: []`) est 2 et non 3.
- La taille des listes est donc usuellement un translaté de -1 de la définition de la taille prise dans le transparent précédent.

Ordre structurel

Définition

Soit E un ensemble de termes et $(t_1, t_2) \in E^2$. Notons $t_1 <_i t_2$ pour indiquer que t_1 est un sous-terme « immédiat » de t_2.
L'*ordre structurel* sur E est la relation d'ordre $\leq$ engendré par $<_i$, c.a.d la clôture réflexive-transitive de $<_i$ (plus petite relation binaire contenant $<_i$ et à la fois réflexive et transitive).
Un *sous-terme* de t est un terme t' tel que $t' \leq t$

Remarque

Pour s'assurer que la relation $\leq$ engendre bien un ordre, il faut s'assurer qu'elle est anti-symétrique.
Elle est, par définition de la clôture, réflexive et transitive.

Clôture réflexive-transitive

- La clôture réflexive-transitive de $<_i$ est par définition la plus petite relation binaire R sur E (*i.e.* partie de $E \times E$) telle que :
  1. $<_i$ est incluse dans R ;
  2. si $x \in E$, alors $(x, x) \in R$;
  3. Si $(x, y) \in R$ et $(y, z) \in R$ alors $(x, z) \in R$

Remarque

Idée de la preuve pour l'existence de $\leq$ (qu'on préfère noter de façon infixe)

- Indication : $E \times E$ contient $<_i$ et est réflexive-transitive. Donc l'ensemble des relations qui vérifient les 3 points est non vide.
- Alors l'intersection de toutes les relations R qui vérifient les points ci-dessus est bien réflexive-transitive et non vide (à prouver).
- Et c'est la plus petite à le vérifier : on la note $\leq$.

Thérème de l'ordre bien fondé

Théorème

Soit E un ensemble de termes. Notons $\leq$ l'ordre structurel sur E et $<$ l'ordre strict associé. On a les propriétés suivantes pour tous t_1, t_2 de E :

- *Si $t_1 < t_2$, alors $|t_1| <_{\mathbb{N}} |t_2|$;*
- *La relation $\leq$ est une relation d'ordre bien fondée.*

Preuve

On suppose $t_1 < t_2$

- Puisque $t_1 \leq t_2$, alors par conséquence de la définition de la clôture réflexive-transitive, il existe $x_1, x_2, \ldots, x_k$ tels que $x_1 = t_1$, $x_k = t_2$ et pour tout $j \in [\![1, k-1]\!]$, $x_j <_i x_{j+1}$.

Preuve

On suppose $t_1 < t_2$

- Puisque $t_1 \leq t_2$, alors par conséquence de la définition de la clôture réflexive-transitive, il existe $x_1, x_2, \ldots, x_k$ tels que $x_1 = t_1$, $x_k = t_2$ et pour tout $j \in [\![1, k-1]\!]$, $x_j <_i x_{j+1}$.
- Comme $t_1 < t_2$, alors $k \geq 2$.

Preuve

On suppose $t_1 < t_2$

- Puisque $t_1 \leq t_2$, alors par conséquence de la définition de la clôture réflexive-transitive, il existe $x_1, x_2, \dots, x_k$ tels que $x_1 = t_1$, $x_k = t_2$ et pour tout $j \in [\![1, k-1]\!]$, $x_j <_i x_{j+1}$.
- Comme $t_1 < t_2$, alors $k \geq 2$.
- Pour j convenable, puisque x_j est un sous-terme immédiat de x_{j+1} (ce que signifie $x_j <_i x_{j+1}$), on a $|x_j| <_{\mathbb{N}} |x_{j+1}|$ (puisqu'il faut au moins un constructeur de plus pour construire x_{j+1} que pour x_j).

Preuve

On suppose $t_1 < t_2$

- Puisque $t_1 \leq t_2$, alors par conséquence de la définition de la clôture réflexive-transitive, il existe $x_1, x_2, \ldots, x_k$ tels que $x_1 = t_1$, $x_k = t_2$ et pour tout $j \in [\![1, k-1]\!]$, $x_j <_i x_{j+1}$.
- Comme $t_1 < t_2$, alors $k \geq 2$.
- Pour j convenable, puisque x_j est un sous-terme immédiat de x_{j+1} (ce que signifie $x_j <_i x_{j+1}$), on a $|x_j| <_{\mathbb{N}} |x_{j+1}|$ (puisqu'il faut au moins un constructeur de plus pour construire x_{j+1} que pour x_j).
- Par transitivité de $<_{\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{N}$, on a $|t_1| < |t_2|$

Preuve : anti-symétrie

- Soient t_1, t_2 deux termes tels que $t_1 \leq t_2$, $t_2 \leq t_1$ et $t_1 \neq t_2$.

Preuve : anti-symétrie

- Soient t_1, t_2 deux termes tels que $t_1 \leq t_2$, $t_2 \leq t_1$ et $t_1 \neq t_2$.
- On a donc $t_1 < t_2$ puisque $t_1 \leq t_2$ et $t_1 \neq t_2$. Ainsi $|t_1| <_{\mathbb{N}} |t_2|$ par le point précédent.

Preuve : anti-symétrie

- Soient t_1, t_2 deux termes tels que $t_1 \leq t_2$, $t_2 \leq t_1$ et $t_1 \neq t_2$.
- On a donc $t_1 < t_2$ puisque $t_1 \leq t_2$ et $t_1 \neq t_2$. Ainsi $|t_1| <_{\mathbb{N}} |t_2|$ par le point précédent.
- De même, on obtient $|t_2| <_{\mathbb{N}} |t_1|$.

Preuve : anti-symétrie

- Soient t_1, t_2 deux termes tels que $t_1 \leq t_2$, $t_2 \leq t_1$ et $t_1 \neq t_2$.
- On a donc $t_1 < t_2$ puisque $t_1 \leq t_2$ et $t_1 \neq t_2$. Ainsi $|t_1| <_{\mathbb{N}} |t_2|$ par le point précédent.
- De même, on obtient $|t_2| <_{\mathbb{N}} |t_1|$.
- Alors $|t_2|, |t_1|$ sont dans $\mathbb{N}$, $|t_1| <_{\mathbb{N}} |t_2|$ et $|t_2| <_{\mathbb{N}} |t_1|$: ABSURDE.

Preuve : caractère bien fondé

- Supposons qu'il existe une suite infinie strictement décroissante $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ pour l'ordre structurel.

Preuve : caractère bien fondé

- Supposons qu'il existe une suite infinie strictement décroissante $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ pour l'ordre structurel.
- Alors, par le point 1 du théorème, la suite des tailles $(|t_i|)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite infinie strictement décroissante de $\mathbb{N}$.

Preuve : caractère bien fondé

- Supposons qu'il existe une suite infinie strictement décroissante $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ pour l'ordre structurel.
- Alors, par le point 1 du théorème, la suite des tailles $(|t_i|)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite infinie strictement décroissante de $\mathbb{N}$.
- Or cela est impossible puisque $\mathbb{N}$ est bien ordonné. ABSURDE.

Présentation

- La définition des ensembles inductifs amène naturellement à une technique de raisonnement sur les termes proche de la récurrence.

Présentation

- La définition des ensembles inductifs amène naturellement à une technique de raisonnement sur les termes proche de la récurrence.
- On peut résumer cette technique ainsi : une propriété à propos des objets inductifs qui vaut pour toutes les constantes et est préservée par chaque construction inductive, est nécessairement vraie pour tous les objets pouvant être construits.

Principe d'induction structurelle

Théorème

Soit E un ensemble inductif et une propriété P à propos des objets de E. Si, pour chaque constructeur c d'arité n, la propriété $P(c(t_1, \ldots, t_n))$ est satisfaite dès lors que les propriétés $P(t_1)$ à $P(t_n)$ sont satisfaites, alors $P(t)$ est satisfaite pour tout t de E.

Principe d'induction structurelle

Théorème

Soit E un ensemble inductif et une propriété P à propos des objets de E. Si, pour chaque constructeur c d'arité n, la propriété $P(c(t_1, \ldots, t_n))$ est satisfaite dès lors que les propriétés $P(t_1)$ à $P(t_n)$ sont satisfaites, alors $P(t)$ est satisfaite pour tout t de E.

Remarque

Si t est une constante, alors pour tout terme $x \in E$, $x <_i t$ est faux. Donc $\forall x \in E, (x <_i t \implies P(x))$ est vraie. Par suite P est satisfaite pour tous les sous-termes immédiats de t. L'hypothèse du Th. entraîne donc que $P(t)$ est satisfaite.

Rappel : $x <_i t$ signifie que x est sous-terme immédiat de t.

Preuve

- Supposons que le sous-ensemble $A \subset E$ des termes ne satisfaisant pas P est non vide.

Preuve

- Supposons que le sous-ensemble $A \subset E$ des termes ne satisfaisant pas P est non vide.
- A admet donc un élément sans prédecesseur t_0 puisque l'ordre est bien fondé.

Preuve

- Supposons que le sous-ensemble $A \subset E$ des termes ne satisfaisant pas P est non vide.
- A admet donc un élément sans prédecesseur t_0 puisque l'ordre est bien fondé.
- Si t_0 est une constante, alors $P(t_0)$ est satisfaite. Ce n'est pas possible puisque $t_0 \in A$.

Preuve

- Supposons que le sous-ensemble $A \subset E$ des termes ne satisfaisant pas P est non vide.
- A admet donc un élément sans prédecesseur t_0 puisque l'ordre est bien fondé.
- Si t_0 est une constante, alors $P(t_0)$ est satisfaite. Ce n'est pas possible puisque $t_0 \in A$.
- Si t_0 n'est pas une constante, il a des sous-termes immédiats. Ils ne peuvent donc être dans A puisque plus petits strictement que t_0.

Preuve

- Supposons que le sous-ensemble $A \subset E$ des termes ne satisfaisant pas P est non vide.
- A admet donc un élément sans prédecesseur t_0 puisque l'ordre est bien fondé.
- Si t_0 est une constante, alors $P(t_0)$ est satisfaite. Ce n'est pas possible puisque $t_0 \in A$.
- Si t_0 n'est pas une constante, il a des sous-termes immédiats. Ils ne peuvent donc être dans A puisque plus petits strictement que t_0.
- Mézalors, chaque sous-terme satisfait la propriété P.

Preuve

- Supposons que le sous-ensemble $A \subset E$ des termes ne satisfaisant pas P est non vide.
- A admet donc un élément sans prédecesseur t_0 puisque l'ordre est bien fondé.
- Si t_0 est une constante, alors $P(t_0)$ est satisfaite. Ce n'est pas possible puisque $t_0 \in A$.
- Si t_0 n'est pas une constante, il a des sous-termes immédiats. Ils ne peuvent donc être dans A puisque plus petits strictement que t_0.
- Mézalors, chaque sous-terme satisfait la propriété P.
- D'après l'hypothèse sur t, cela veut dire que $P(t_0)$ est satisfaite et donc que $t_0 \notin A$: ABSURDE.

Exemple : élément neutre

Les équations définissant l'addition des entiers de Peano assurent que $Z + n = n$ vaut pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Montrons que $n + Z = n$ pour tout n également :

- Cas de base : $Z + Z = Z$ par définition de $+$ (1ere équation)

Exemple : élément neutre

Les équations définissant l'addition des entiers de Peano assurent que $Z + n = n$ vaut pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Montrons que $n + Z = n$ pour tout n également :

- Cas de base : $Z + Z = Z$ par définition de $+$ (1ere équation)
- Hérédité : prenons un entier de Peano n satisfaisant $n + Z = n$. Alors :

$$\begin{aligned} S(n) + Z &= S(n + Z) \text{ par déf. de } + \\ &= S(n) \text{Par HI} \end{aligned}$$

Exemple : élément neutre

Les équations définissant l'addition des entiers de Peano assurent que $Z + n = n$ vaut pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Montrons que $n + Z = n$ pour tout n également :

- Cas de base : $Z + Z = Z$ par définition de $+$ (1ere équation)
- Hérédité : prenons un entier de Peano n satisfaisant $n + Z = n$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} S(n) + Z & = & S(n+Z) \text{ par déf. de } + \\ & = & S(n) \text{Par HI} \end{array}$$

- On en déduit que pour tout entier de Peano n, $n + Z = n$.

Récurrence

En récrivant le principe d'induction structurelle des entiers de Peano avec les notations habituelles (0 au lieu de Z, 2 au lieu de $S(S(Z))$, et en considérant P, un prédicat sur les entiers, nous obtenons que :

- Si $P(0)$ est vrai ;
- et si pour tout n satisfaisant $P(n)$, la propriété $P(n+1)$ est satisfaite ;
- alors pour tout n entier, la propriété $P(n)$ est satisfaite.
- C'est précisément le principe de récurrence ! !