Graphes

Ivan Noyer

Lycée Thiers

Crédits

- Wikipédia : théorie des graphes
- Wikipédia : graphes simples
- Toujours le Mansuy.

Les sept ponts de Königsberg

- Un article du mathématicien suisse Leonhard Euler, présenté à l'Académie de Saint-Pétersbourg en 1735 puis publié en 1741.

Les sept ponts de Königsberg

- Un article du mathématicien suisse Leonhard Euler, présenté à l'Académie de Saint-Pétersbourg en 1735 puis publié en 1741.
- Trouver une promenade à partir d'un point donné qui fasse revenir à ce point en passant une fois et une seule par chacun des sept ponts de la ville de Königsberg : Circuit *eulérien*.

Les sept ponts de Königsberg

- Un article du mathématicien suisse Leonhard Euler, présenté à l'Académie de Saint-Pétersbourg en 1735 puis publié en 1741.
- Trouver une promenade à partir d'un point donné qui fasse revenir à ce point en passant une fois et une seule par chacun des sept ponts de la ville de Königsberg : Circuit *eulérien*.
- Euler fut sans doute le premier à proposer un traitement mathématique de la question, suivi par Vandermonde.

Les sept ponts de Königsberg

- Un article du mathématicien suisse Leonhard Euler, présenté à l'Académie de Saint-Pétersbourg en 1735 puis publié en 1741.
- Trouver une promenade à partir d'un point donné qui fasse revenir à ce point en passant une fois et une seule par chacun des sept ponts de la ville de Königsberg : Circuit *eulérien*.
- Euler fut sans doute le premier à proposer un traitement mathématique de la question, suivi par Vandermonde.

FIGURE – Abstraction du problème des 7 ponts de Königsberg

Les sept ponts de Königsberg

- Un article du mathématicien suisse Leonhard Euler, présenté à l'Académie de Saint-Pétersbourg en 1735 puis publié en 1741.
- Trouver une promenade à partir d'un point donné qui fasse revenir à ce point en passant une fois et une seule par chacun des sept ponts de la ville de Königsberg : Circuit *eulérien*.
- Euler fut sans doute le premier à proposer un traitement mathématique de la question, suivi par Vandermonde.

FIGURE – Abstraction du problème des 7 ponts de Königsberg

- Théorème : *Un graphe connexe admet un circuit eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.*
  Ici un des sommets a 3 *voisins* : pas de circuit eulérien.

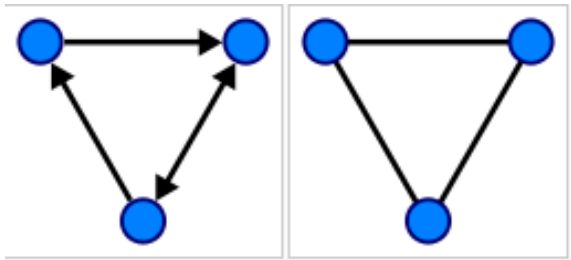
Informellement

- Un graphe est un ensemble de points dans lequel on fait apparaître une ou plusieurs relations(s) entre deux points.
  Ces relations sont en général représentées par des flèches ou par des segments. Dans le premier cas, le graphe est dit *orienté* et les liens sont appelés des *arcs*. Dans le second, le graphe est dit *non* orienté et les liens sont souvent appelés des *arêtes*.

Informellement

- Un graphe est un ensemble de points dans lequel on fait apparaître une ou plusieurs relations(s) entre deux points.
  Ces relations sont en général représentées par des flèches ou par des segments. Dans le premier cas, le graphe est dit *orienté* et les liens sont appelés des *arcs*. Dans le second, le graphe est dit *non* orienté et les liens sont souvent appelés des *arêtes*.
- Les points sont appelés les *sommets* (en référence aux polyèdres) ou les *nœuds* (en références à la loi des nœuds).

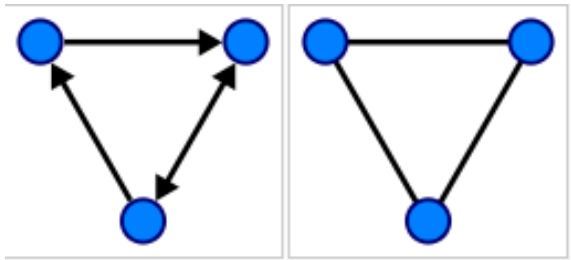
FIGURE – Un graphe orienté avec des arcs - un graphe non orienté et ses arêtes.



Informellement

- Un graphe est un ensemble de points dans lequel on fait apparaître une ou plusieurs relations(s) entre deux points.
  Ces relations sont en général représentées par des flèches ou par des segments. Dans le premier cas, le graphe est dit *orienté* et les liens sont appelés des *arcs*. Dans le second, le graphe est dit *non* orienté et les liens sont souvent appelés des *arêtes*.
- Les points sont appelés les *sommets* (en référence aux polyèdres) ou les *nœuds* (en références à la loi des nœuds).

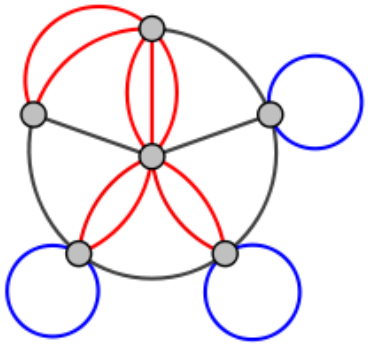
FIGURE – Un graphe orienté avec des arcs - un graphe non orienté et ses arêtes.



- Exemple : plan d'une ville.

Informellement

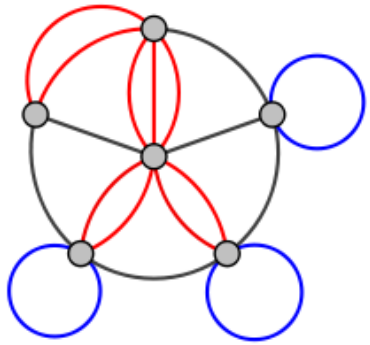
FIGURE – Un *multigraphe* non orienté : ses *arêtes multiples* en rouge et ses *boucles* en bleu



- En anglais, sommet se dit *vertice*, arête se dit *undirected edge* et arc se dit *directed edge*.

Informellement

FIGURE – Un *multigraphe* non orienté : ses *arêtes multiples* en rouge et ses *boucles* en bleu



- En anglais, sommet se dit *vertice*, arête se dit *undirected edge* et arc se dit *directed edge*.
- Les arêtes multiples ne sont pas au programme.

Graphe simple non orienté

La définition suivante ne s'applique pas aux graphes avec arêtes multiples.

Définition

Un *graphe (simple) non orienté* G est un couple (V, E) où $E \subseteq \mathcal{P}(V)$ est un ensemble de paires ou de singleton d'éléments de V.
On appelle *sommets* les éléments de V et *arcs* ceux de E.

- La lettre E est utilisée pour les arcs car en anglais, *arcs* se dit *edge*.

Graphe simple non orienté

La définition suivante ne s'applique pas aux graphes avec arêtes multiples.

Définition

Un *graphe (simple) non orienté* G est un couple (V, E) où $E \subseteq \mathcal{P}(V)$ est un ensemble de paires ou de singleton d'éléments de V.
On appelle *sommets* les éléments de V et *arcs* ceux de E.

- La lettre E est utilisée pour les arcs car en anglais, *arcs* se dit *edge*.
- Certains auteurs utilisent un vocabulaire spécial pour les graphes non orientés. Par exemple, une *arête* (*undirected edge*) désigne un arc.

Graphe simple non orienté

La définition suivante ne s'applique pas aux graphes avec arêtes multiples.

Définition

Un *graphe (simple) non orienté* G est un couple (V, E) où $E \subseteq \mathcal{P}(V)$ est un ensemble de paires ou de singleton d'éléments de V.
On appelle *sommets* les éléments de V et *arcs* ceux de E.

- La lettre E est utilisée pour les arcs car en anglais, *arcs* se dit *edge*.
- Certains auteurs utilisent un vocabulaire spécial pour les graphes non orientés. Par exemple, une *arête* (*undirected edge*) désigne un arc.
- Soit $a = \{x, y\}$. On dit que :

Graphe simple non orienté

La définition suivante ne s'applique pas aux graphes avec arêtes multiples.

Définition

Un *graphe (simple) non orienté* G est un couple (V, E) où $E \subseteq \mathcal{P}(V)$ est un ensemble de paires ou de singleton d'éléments de V.
On appelle *sommets* les éléments de V et *arcs* ceux de E.

- La lettre E est utilisée pour les arcs car en anglais, *arcs* se dit *edge*.
- Certains auteurs utilisent un vocabulaire spécial pour les graphes non orientés. Par exemple, une *arête* (*undirected edge*) désigne un arc.
- Soit $a = \{x, y\}$. On dit que :
  - a relie les sommets x et y, x et y sont *adjacents* ou encore *voisins*,

Graphe simple non orienté

La définition suivante ne s'applique pas aux graphes avec arêtes multiples.

Définition

Un *graphe (simple) non orienté* G est un couple (V, E) où $E \subseteq \mathcal{P}(V)$ est un ensemble de paires ou de singleton d'éléments de V.
On appelle *sommets* les éléments de V et *arcs* ceux de E.

- La lettre E est utilisée pour les arcs car en anglais, *arcs* se dit *edge*.
- Certains auteurs utilisent un vocabulaire spécial pour les graphes non orientés. Par exemple, une *arête* (*undirected edge*) désigne un arc.
- Soit $a = \{x, y\}$. On dit que :
  - a relie les sommets x et y, x et y sont *adjacents* ou encore *voisins*,
  - a est *incidente* avec x et y ou encore x et y sont *incidents* avec a.

Graphe simple orienté

Au programme ne figurent que les graphes avec au plus un seul arc d'un sommet à un autre.

Définition

Un *graphe simple orienté* G est un couple (V, E) où :

- V est appelé *l'ensemble des sommets* de G,

Graphe simple orienté

Au programme ne figurent que les graphes avec au plus un seul arc d'un sommet à un autre.

Définition

Un *graphe simple orienté* G est un couple (V, E) où :

- V est appelé *l'ensemble des sommets* de G,
- et $A \subseteq V^2$ est un ensemble de couples d'éléments de V appelé *l'ensemble des arcs* de G.

Graphe simple orienté

Au programme ne figurent que les graphes avec au plus un seul arc d'un sommet à un autre.

Définition

Un *graphe simple orienté* G est un couple (V, E) où :

- V est appelé *l'ensemble des sommets* de G,
- et $A \subseteq V^2$ est un ensemble de couples d'éléments de V appelé *l'ensemble des arcs* de G.

- La lettre V est utilisée pour les sommets car en anglais, sommet se dit *vertex* (au pluriel *vertices*).

Graphe simple orienté

Au programme ne figurent que les graphes avec au plus un seul arc d'un sommet à un autre.

Définition

Un *graphe simple orienté* G est un couple (V, E) où :

- V est appelé *l'ensemble des sommets* de G,
- et $A \subseteq V^2$ est un ensemble de couples d'éléments de V appelé *l'ensemble des arcs* de G.

- La lettre V est utilisée pour les sommets car en anglais, sommet se dit *vertex* (au pluriel *vertices*).
- Un *arbre* est un cas particulier de graphe orienté simple.

Graphe simple orienté

Au programme ne figurent que les graphes avec au plus un seul arc d'un sommet à un autre.

Définition

Un *graphe simple orienté* G est un couple (V, E) où :

- V est appelé *l'ensemble des sommets* de G,
- et $A \subseteq V^2$ est un ensemble de couples d'éléments de V appelé *l'ensemble des arcs* de G.

- La lettre V est utilisée pour les sommets car en anglais, sommet se dit *vertex* (au pluriel *vertices*).
- Un *arbre* est un cas particulier de graphe orienté simple.
- Mais pour certains auteurs, un arbre est un graphe non orienté connexe et acyclique (voir plus loin pour les définitions).

Graphe simple orienté

Un arc est noté $a = (x, y)$ ou $a = x \to y$ et on dit que :

- a *va* de x à y,

Graphe simple orienté

Un arc est noté $a = (x, y)$ ou $a = x \to y$ et on dit que :

- a *va* de x à y,
- x est l'*extrémité initiale* de a,

Graphe simple orienté

Un arc est noté $a = (x, y)$ ou $a = x \to y$ et on dit que :

- a *va* de x à y,
- x est l'*extrémité initiale* de a,
- y est l'*extrémité terminale* de a,

Graphe simple orienté

Un arc est noté $a = (x, y)$ ou $a = x \to y$ et on dit que :

- a *va* de x à y,
- x est l'*extrémité initiale* de a,
- y est l'*extrémité terminale* de a,
- y est un *voisin* de x. a est *incident à* x et y.

Degré

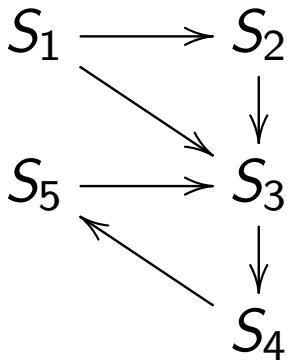
- Dans un graphe général (orienté ou non), on appelle degré d'un sommet s et on note $d(s)$, le nombre d'arcs incidents au sommet s. Un cas particulier important est celui des *boucles* (arêtes dont les deux extrémités sont égales). On les compte deux fois.

Degré

- Dans un graphe général (orienté ou non), on appelle degré d'un sommet s et on note $d(s)$, le nombre d'arcs incidents au sommet s. Un cas particulier important est celui des *boucles* (arêtes dont les deux extrémités sont égales). On les compte deux fois.
- Dans un graphe général orienté, on distingue le degré sortant ou extérieur $d^+(s)$ qui est égal au nombre d'arcs dont s est l'extrémité initiale et le degré entrant ou intérieur $d^-(s)$ qui est égal au nombre d'arcs dont s est l'extrémité finale.

Degré

- Dans un graphe général (orienté ou non), on appelle degré d'un sommet s et on note $d(s)$, le nombre d'arcs incidents au sommet s. Un cas particulier important est celui des *boucles* (arêtes dont les deux extrémités sont égales). On les compte deux fois.
- Dans un graphe général orienté, on distingue le degré sortant ou extérieur $d^+(s)$ qui est égal au nombre d'arcs dont s est l'extrémité initiale et le degré entrant ou intérieur $d^-(s)$ qui est égal au nombre d'arcs dont s est l'extrémité finale.



- $d^-(S_3) = 3$; $d^+(S_3) = 1$; $d(S_3) = 4$

Matrice d'adjacence sommets-sommets

Définition

Soit $G = (V, E)$ un graphe *fini* simple.
Notons $\{v_1, \ldots, v_n\}$ les sommets de V.
On appelle *matrice d'adjacence sommets-sommets de* $G = (V, E)$ la matrice $n \times n$ $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si il existe un arc de } v_i \text{ à } v_j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarque

- La matrice d'adjacence dépend de la numérotation des sommets. Il faut que cette numérotation soit connue pour comprendre la matrice.

Matrice d'adjacence sommets-sommets

Définition

Soit $G = (V, E)$ un graphe *fini* simple.
Notons $\{v_1, \ldots, v_n\}$ les sommets de V.
On appelle *matrice d'adjacence sommets-sommets de* $G = (V, E)$ la matrice $n \times n$ $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si il existe un arc de } v_i \text{ à } v_j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarque

- La matrice d'adjacence dépend de la numérotation des sommets. Il faut que cette numérotation soit connue pour comprendre la matrice.
- A une numérotation des sommets correspond une unique matrice d'ajacence sommets-sommets.

Matrice d'adjacence sommets-sommets

Définition

Soit $G = (V, E)$ un graphe *fini* simple.
Notons $\{v_1, \ldots, v_n\}$ les sommets de V.
On appelle *matrice d'adjacence sommets-sommets de* $G = (V, E)$ la matrice $n \times n$ $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si il existe un arc de } v_i \text{ à } v_j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarque

- La matrice d'adjacence dépend de la numérotation des sommets. Il faut que cette numérotation soit connue pour comprendre la matrice.
- A une numérotation des sommets correspond une unique matrice d'ajacence sommets-sommets.
- Inadaptée pour les arêtes (ou les arcs) multiples. Présence de boucle si $a_{ii} = 1$.

Matrice d'adjacence sommets-sommets

Définition

Soit $G = (V, E)$ un graphe *fini* simple.
Notons $\{v_1, \ldots, v_n\}$ les sommets de V.
On appelle *matrice d'adjacence sommets-sommets de* $G = (V, E)$ la matrice $n \times n$ $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si il existe un arc de } v_i \text{ à } v_j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarque

- La matrice d'adjacence dépend de la numérotation des sommets. Il faut que cette numérotation soit connue pour comprendre la matrice.
- A une numérotation des sommets correspond une unique matrice d'ajacence sommets-sommets.
- Inadaptée pour les arêtes (ou les arcs) multiples. Présence de boucle si $a_{ii} = 1$.

Liste d'adjacence

Définition

Soit $G = (V, E)$ un graphe *fini* simple.
On appelle *liste d'adjacence* de G toute liste de couples (s, ℓ) où s parcourt V et ℓ est *une* liste de ses voisins.

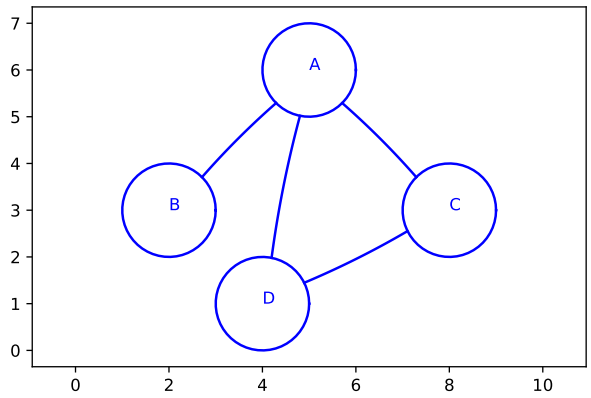
Remarque

Si une numérotation des sommets est choisie, on peut se contenter de donner la liste des voisins. La première liste donne les voisins du premier sommet, la seconde celle du second sommet etc...

Exemple de représentation

Cas non orienté

FIGURE – Un graphe *étiqueté* non orienté



Matrice d'adjacence

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice symétrique.

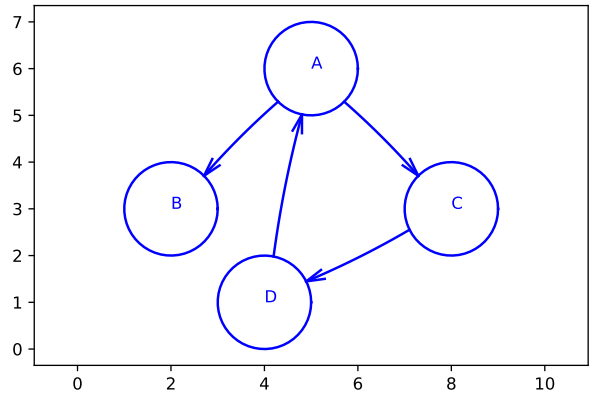
Liste d'adjacence

[('A', ['B', 'C', 'D']), ('B', ['A']), ('C', ['A', 'D']), ('D', ['C', 'A'])] ou **[['B', 'C', 'D'], ['A'], ['A', 'D'], ['C', 'A']]**

Exemple de représentation

Cas orienté

FIGURE – Un graphe *étiqueté* orienté



Matrice d'adjacence

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice non symétrique.

Liste d'adjacence

[('A', ['B', 'C']), ('B', []), ('C', ['D']), ('D', ['A'])] ou **[['B', 'C'], [], ['D'], ['A']]**

Matrices d'adjacence : quelle représentation ?

- En OCaml ou C, les matrices d'adjacence sont simplement représentées par des *matrices carrées* c.a.d. des tableaux à deux dimensions avec même nombre de lignes que de colonnes.

Matrices d'adjacence : quelle représentation ?

- En OCaml ou C, les matrices d'adjacence sont simplement représentées par des *matrices carrées* c.a.d. des tableaux à deux dimensions avec même nombre de lignes que de colonnes.
- A la place de 0 et de 1, on peut utiliser vdes bouléens.

Matrices d'adjacence : quelle représentation ?

- En OCaml ou C, les matrices d'adjacence sont simplement représentées par des *matrices carrées* c.a.d. des tableaux à deux dimensions avec même nombre de lignes que de colonnes.
- A la place de 0 et de 1, on peut utiliser vdes bouléens.
- Implicitement on considère que les sommets sont des nombres. Ou alors on dispose d'un tableau de correspondance entre les sommets et leurs numéros (utile si les sommets contiennent des informations).

Matrices d'adjacence : quelle représentation ?

- En OCaml ou C, les matrices d'adjacence sont simplement représentées par des *matrices carrées* c.a.d. des tableaux à deux dimensions avec même nombre de lignes que de colonnes.
- A la place de 0 et de 1, on peut utiliser vdes bouléens.
- Implicitement on considère que les sommets sont des nombres. Ou alors on dispose d'un tableau de correspondance entre les sommets et leurs numéros (utile si les sommets contiennent des informations).
- Avec un tel choix :

Matrices d'adjacence : quelle représentation ?

- En OCaml ou C, les matrices d'adjacence sont simplement représentées par des *matrices carrées* c.a.d. des tableaux à deux dimensions avec même nombre de lignes que de colonnes.
- A la place de 0 et de 1, on peut utiliser vdes bouléens.
- Implicitement on considère que les sommets sont des nombres. Ou alors on dispose d'un tableau de correspondance entre les sommets et leurs numéros (utile si les sommets contiennent des informations).
- Avec un tel choix :
  - il est facile de supprimer ou d'ajouter un arc entre deux sommets existants.

Matrices d'adjacence : quelle représentation ?

- En OCaml ou C, les matrices d'adjacence sont simplement représentées par des *matrices carrées* c.a.d. des tableaux à deux dimensions avec même nombre de lignes que de colonnes.
- A la place de 0 et de 1, on peut utiliser vdes bouléens.
- Implicitement on considère que les sommets sont des nombres. Ou alors on dispose d'un tableau de correspondance entre les sommets et leurs numéros (utile si les sommets contiennent des informations).
- Avec un tel choix :
  - il est facile de supprimer ou d'ajouter un arc entre deux sommets existants.
  - On teste en $O(1)$ si deux sommets sont voisins.

Matrices d'adjacence : quelle représentation ?

- En OCaml ou C, les matrices d'adjacence sont simplement représentées par des *matrices carrées* c.a.d. des tableaux à deux dimensions avec même nombre de lignes que de colonnes.
- A la place de 0 et de 1, on peut utiliser vdes bouléens.
- Implicitement on considère que les sommets sont des nombres. Ou alors on dispose d'un tableau de correspondance entre les sommets et leurs numéros (utile si les sommets contiennent des informations).
- Avec un tel choix :
  - il est facile de supprimer ou d'ajouter un arc entre deux sommets existants.
  - On teste en $O(1)$ si deux sommets sont voisins.
  - Ajouter un sommet nécessite en général une copie de la matrice (complexité quadratique).

Matrices d'adjacence : quelle représentation ?

- En OCaml ou C, les matrices d'adjacence sont simplement représentées par des *matrices carrées* c.a.d. des tableaux à deux dimensions avec même nombre de lignes que de colonnes.
- A la place de 0 et de 1, on peut utiliser vdes bouléens.
- Implicitement on considère que les sommets sont des nombres. Ou alors on dispose d'un tableau de correspondance entre les sommets et leurs numéros (utile si les sommets contiennent des informations).
- Avec un tel choix :
  - il est facile de supprimer ou d'ajouter un arc entre deux sommets existants.
  - On teste en $O(1)$ si deux sommets sont voisins.
  - Ajouter un sommet nécessite en général une copie de la matrice (complexité quadratique).
  - Place mémoire perdue importante si beaucoup de sommets et matrice creuse.

Listes d'adjacence en OCaml : quelle représentation ?

En OCaml pour un graphe $G = (V, E)$:

- On peut considérer une liste L de longueur $|V|$ de tuples (s, ℓ) ou s est un sommet et ℓ la liste des voisins de s.

Listes d'adjacence en OCaml : quelle représentation ?

En OCaml pour un graphe $G = (V, E)$:

- On peut considérer une liste L de longueur $|V|$ de tuples (s, ℓ) ou s est un sommet et ℓ la liste des voisins de s.
  - Avantages : pas de place mémoire perdue ; possibilité d'ajouter un nouveau sommet après avoir vérifié que ce sommet n'est pas déjà dans la liste.

Listes d'adjacence en OCaml : quelle représentation ?

En OCaml pour un graphe $G = (V, E)$:

- On peut considérer une liste L de longueur $|V|$ de tuples (s, ℓ) ou s est un sommet et ℓ la liste des voisins de s.
  - Avantages : pas de place mémoire perdue ; possibilité d'ajouter un nouveau sommet après avoir vérifié que ce sommet n'est pas déjà dans la liste.
  - Inconvénients : Accès à la liste d'adjacence de s en $O(|V|)$; test de voisinage entre s et x en $O(|V| + \deg s)$; ajout d'un arc (s, x) en $O(|V| + \deg s)$.

Listes d'adjacence en OCaml : quelle représentation ?

En OCaml pour un graphe $G = (V, E)$:

- On peut considérer une liste L de longueur $|V|$ de tuples (s, ℓ) ou s est un sommet et ℓ la liste des voisins de s.
  - Avantages : pas de place mémoire perdue ; possibilité d'ajouter un nouveau sommet après avoir vérifié que ce sommet n'est pas déjà dans la liste.
  - Inconvénients : Accès à la liste d'adjacence de s en $O(|V|)$; test de voisinage entre s et x en $O(|V| + \deg s)$; ajout d'un arc (s, x) en $O(|V| + \deg s)$.
- On peut préferer gérer un tableau de listes ℓ plutôt qu'une liste de tuples (les sommets sont alors des nombres).

Listes d'adjacence en OCaml : quelle représentation ?

En OCaml pour un graphe $G = (V, E)$:

- On peut considérer une liste L de longueur $|V|$ de tuples (s, ℓ) ou s est un sommet et ℓ la liste des voisins de s.
  - Avantages : pas de place mémoire perdue ; possibilité d'ajouter un nouveau sommet après avoir vérifié que ce sommet n'est pas déjà dans la liste.
  - Inconvénients : Accès à la liste d'adjacence de s en $O(|V|)$; test de voisinage entre s et x en $O(|V| + \deg s)$; ajout d'un arc (s, x) en $O(|V| + \deg s)$.
- On peut préferer gérer un tableau de listes ℓ plutôt qu'une liste de tuples (les sommets sont alors des nombres).
  - Avantage : l'accès à la liste d'adjacence de s est en $O(1)$; test de voisinage avec x en $O(\deg s)$; ajout d'un arc (s, x) en $O(\deg s)$ (il faut vérifier que l'arc n'est pas déjà présent - usage de **list.mem** -).

Listes d'adjacence en OCaml : quelle représentation ?

En OCaml pour un graphe $G = (V, E)$:

- On peut considérer une liste L de longueur $|V|$ de tuples (s, ℓ) ou s est un sommet et ℓ la liste des voisins de s.
  - Avantages : pas de place mémoire perdue ; possibilité d'ajouter un nouveau sommet après avoir vérifié que ce sommet n'est pas déjà dans la liste.
  - Inconvénients : Accès à la liste d'adjacence de s en $O(|V|)$; test de voisinage entre s et x en $O(|V| + \deg s)$; ajout d'un arc (s, x) en $O(|V| + \deg s)$.
- On peut préferer gérer un tableau de listes ℓ plutôt qu'une liste de tuples (les sommets sont alors des nombres).
  - Avantage : l'accès à la liste d'adjacence de s est en $O(1)$; test de voisinage avec x en $O(\deg s)$; ajout d'un arc (s, x) en $O(\deg s)$ (il faut vérifier que l'arc n'est pas déjà présent - usage de **list.mem** -).
  - Inconvénient : pour ajouter un sommet, il faut recopier le tableau.

Listes d'adjacence en C : quelle représentation ?

Tableau de liste chaînée

Dans le même esprit qu'en OCaml, pour représenter $G = (V, E)$

- Tableau **t** des successeurs de chaque sommet.

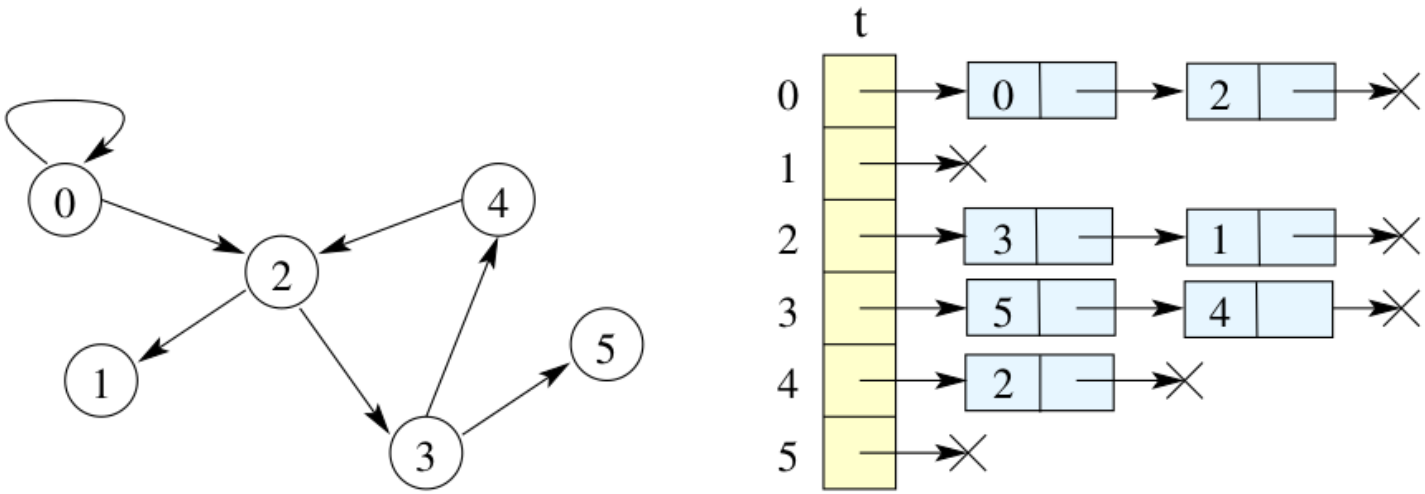


FIGURE – Un tableau de liste chaînée de successeurs. (F. Pesseaux)

Listes d'adjacence en C : quelle représentation ?

Tableau de liste chaînée

Dans le même esprit qu'en OCaml, pour représenter $G = (V, E)$

- Tableau **t** des successeurs de chaque sommet.
- **t[i]** pointe sur la liste des sucesseurs du sommet i.

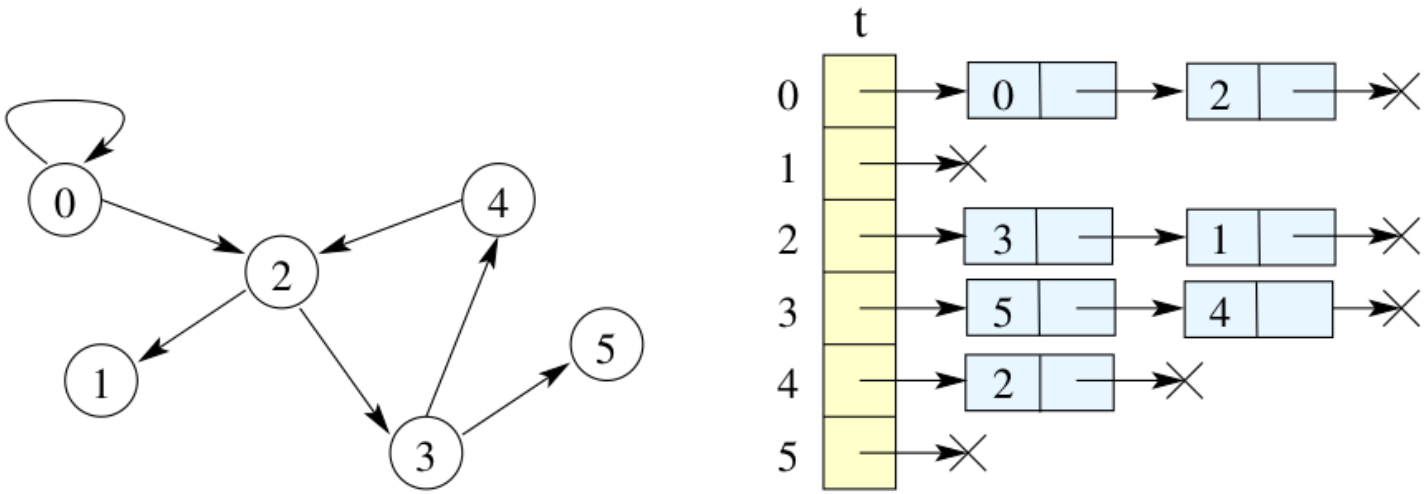


FIGURE – Un tableau de liste chaînée de successeurs. (F. Pesseaux)

Listes d'adjacence en C : quelle représentation ?

Tableau de liste chaînée

Dans le même esprit qu'en OCaml, pour représenter $G = (V, E)$

- Tableau **t** des successeurs de chaque sommet.
- **t[i]** pointe sur la liste des sucesseurs du sommet i.
- Accès direct à un sommet via t.

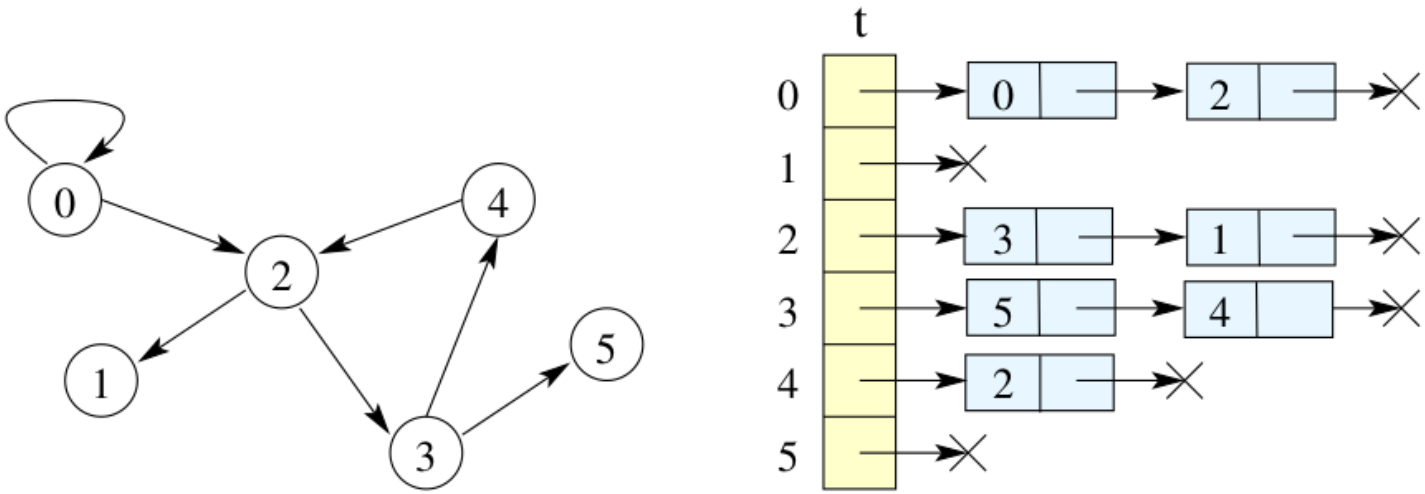


FIGURE – Un tableau de liste chaînée de successeurs. (F. Pesseaux)

Listes d'adjacence en C : quelle représentation ?

Tableau de liste chaînée

Dans le même esprit qu'en OCaml, pour représenter $G = (V, E)$

- Tableau **t** des successeurs de chaque sommet.
- **t[i]** pointe sur la liste des sucesseurs du sommet i.
- Accès direct à un sommet via t.
- Complexité spatiale optimale en $O(|E| + |V|)$

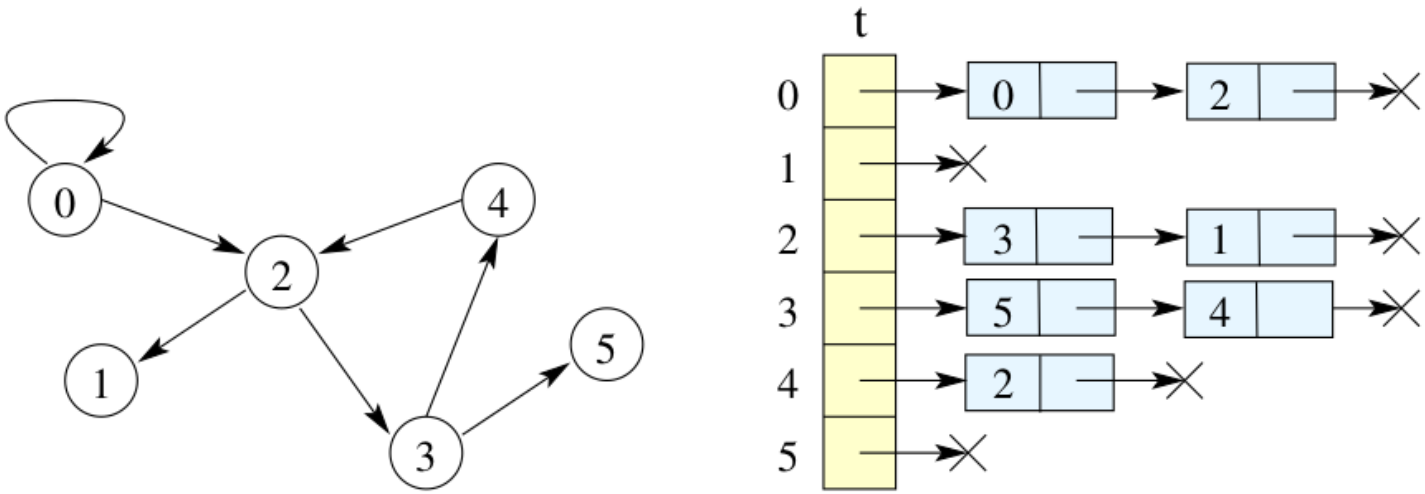


FIGURE – Un tableau de liste chaînée de successeurs. (F. Pesseaux)

Listes d'adjacence en C : quelle représentation ?

Tableau de liste chaînée

```
1  #define MAXVERTICE 10
2  typedef int edge_val ;// étiquette sur les arcs
3  typedef int vertex_name_t ;//nom des sommet
4
5  struct edge_list_t {// liste de voisins = extrémités d'arcs
6    int dest ;// extrémité de l'arc
7    edge_val data ;// étiquette sur l'arc
8    struct edge_list_t * next;
9  };
10
11 struct vertex_t {
12   vertex_name_t name ;// nom du sommet; origine des arcs issus de ce sommet)
13   struct edge_list_t * edges;// liste de voisins
14 };
15
16 struct graph_t {
17   int nb_vertices ;
18   struct vertex_t *vertices [ MAX_VERTICES ];
19 };
20
21
```

- ici, il y a des étiquettes sur les arcs ;
- si nom$\neq$ index de tableau : besoin d'une fonction $nom \rightarrow index$
- le champ `vertices` est un tableau de pointeurs sur des sommets (des objets `vertex_t`).

Listes d'adjacence en C : quelle représentation ?

Partage physique des sommets

On peut aussi partager physiquement les sommets.

- Chaque sommet est représenté 1 et 1 seule fois.

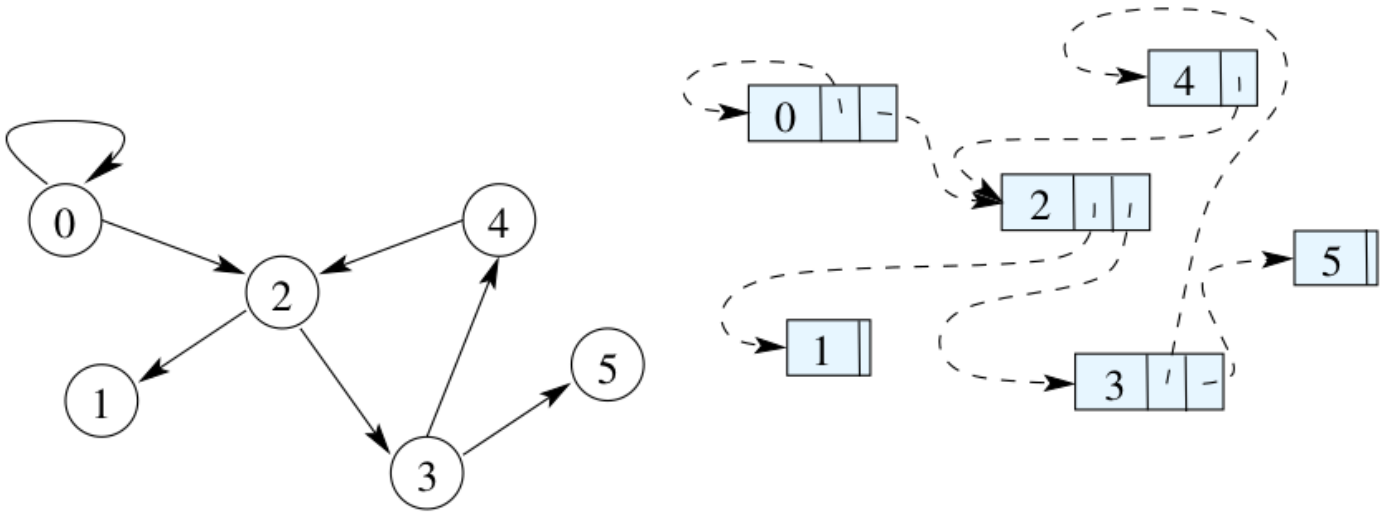


FIGURE – Partage physique des données (F.Pesseaux)

Listes d'adjacence en C : quelle représentation ?

Partage physique des sommets

On peut aussi partager physiquement les sommets.

- Chaque sommet est représenté 1 et 1 seule fois.
- Chaque sommet est associé à une liste dont les éléments pointent sur ses successeurs.

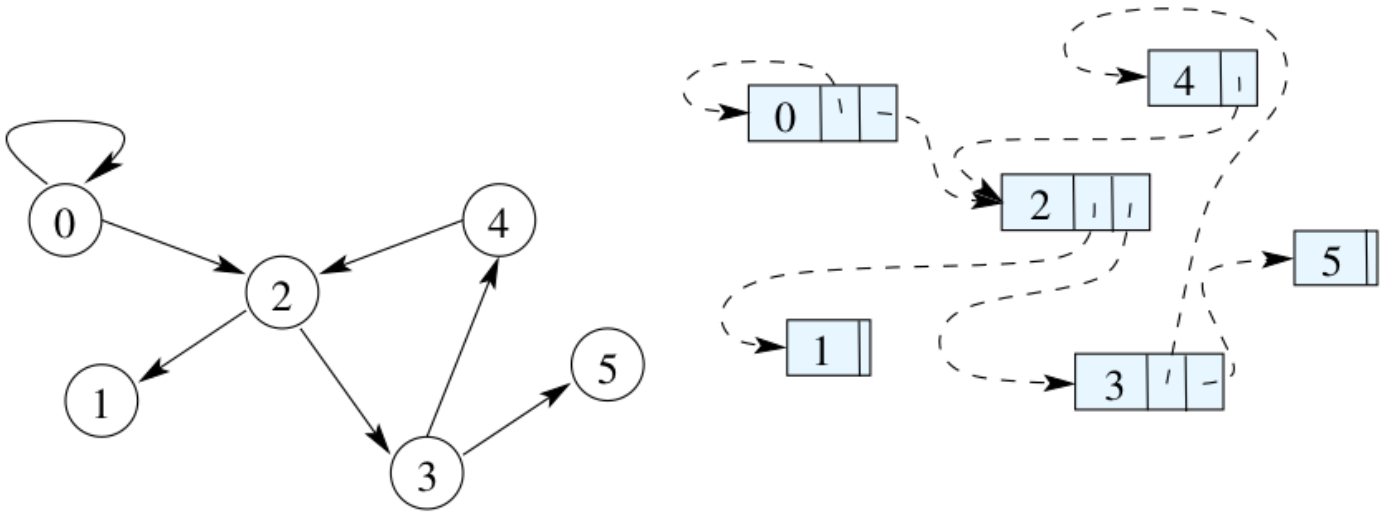


FIGURE – Partage physique des données (F.Pesseaux)

Listes d'adjacence en C : quelle représentation ?

Partage physique des sommets

```
1  struct vertex_list_t ;
2  struct vertex_t ;
3
4  struct vertex_t {
5    vertex_name_t name ;//nom
6    struct vertex_list_t * neighbours;// liste de sommets voisins
7    bool seen ;// visité / pas visité
8  };
9
10 struct vertex_list_t {
11   struct vertex_t * vertex ;// sommet
12   struct vertex_list_t * next;// pointeur sur liste de sommets
13 };
14
15 struct graph_t {// un graphe est fondamentalement une liste de sommets
16   int nb_vertices ;
17   struct vertex_list_t * vertices ;//pointeur sur liste de sommets du graphe
18 };
19
```

1. chaque sommet vient avec son nom, un pointeur sur sa liste de sommets voisins (qui est une liste de pointeurs sur sommets) et une étiquette (visité ou non) ;
2. une liste de sommets contient un pointeur sur sommet et un pointeur sur le mailllon suivant.

Sous-graphes

Convention : V pour *vertice*, E pour *edge*.

- Un *sous-graphe* est un graphe contenu dans un autre graphe :
  « $H = (V_H, E_H)$ est un sous-graphe de $G = (V_G, E_G)$ si $V_H \subset V_G$, $E_H \subset E_G$ et pour tout arc (resp. arête) de E_H, les extrémités sont dans V_H ».
  On supprime des arcs et des sommets avec la contrainte qu'**il ne faut pas conserver d'arc dont une extrémité a été supprimée de l'ensemble des sommets**.

Sous-graphes

Convention : V pour *vertice*, E pour *edge*.

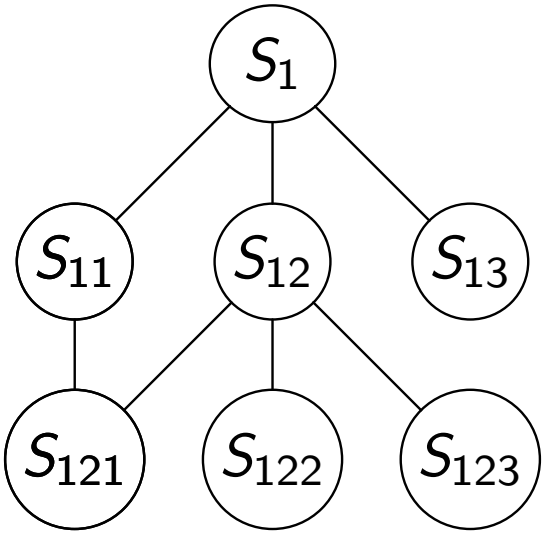
- Un *sous-graphe* est un graphe contenu dans un autre graphe :
  « $H = (V_H, E_H)$ est un sous-graphe de $G = (V_G, E_G)$ si $V_H \subset V_G$, $E_H \subset E_G$ et pour tout arc (resp. arête) de E_H, les extrémités sont dans V_H ».
  On supprime des arcs et des sommets avec la contrainte qu'**il ne faut pas conserver d'arc dont une extrémité a été supprimée de l'ensemble des sommets**.
- Un *sous-graphe couvrant* (ou *graphe partiel*) est un sous-graphe ayant le même ensemble de sommets que le graphe qui le contient.
  « H est un sous-graphe couvrant de G (ou H *couvre* G) si $V_H = V_G$ et $E_H \subset E_G$. »
  On garde tous les sommets, on enlève certains arcs.

Sous-graphes

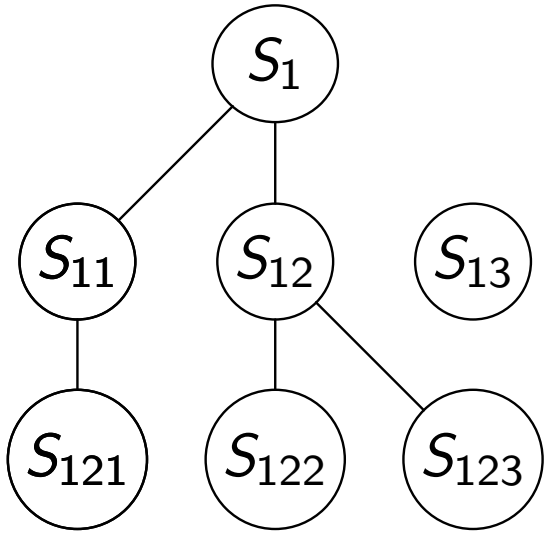
Convention : V pour *vertice*, E pour *edge*.

- Un *sous-graphe induit* est un sous-graphe défini par un sous ensemble de sommets.
  « H est *un sous-graphe induit* de G si, pour tout $(x, y) \in V_H^2$, y est voisin de x dans H si et seulement si y est voisin de x dans G. »
  On enlève des sommets, toutes les arêtes correspondant à ces sommets et uniquement celles-là.

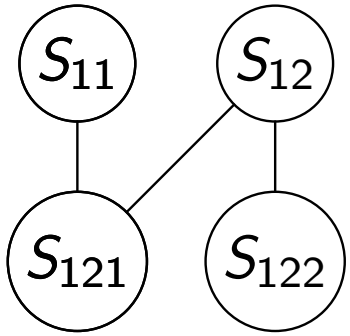
Exemples



Le graphe initial



Un graphe couvrant



Le sous-graphe induit par $\{S_{11}, S_{12}, S_{121}, S_{122}\}$

Chaînes et Chemins

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

- Un *chemin* d'un sommet x à un sommet y est une séquence de (au moins 2) sommets $x = x_0, x_1 \ldots, x_{n-1}, x_n = y$ dans laquelle chaque x_i admet x_{i+1} pour voisin.

Chaînes et Chemins

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

- Un *chemin* d'un sommet x à un sommet y est une séquence de (au moins 2) sommets $x = x_0, x_1 \ldots, x_{n-1}, x_n = y$ dans laquelle chaque x_i admet x_{i+1} pour voisin.
- Un sommet y est *accessible* depuis x s'il existe un chemin de x à y.

Chaînes et Chemins

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

- Un *chemin* d'un sommet x à un sommet y est une séquence de (au moins 2) sommets $x = x_0, x_1 \ldots, x_{n-1}, x_n = y$ dans laquelle chaque x_i admet x_{i+1} pour voisin.
- Un sommet y est *accessible* depuis x s'il existe un chemin de x à y.
- La *longueur* d'un chemin est égale au nombre d'arêtes qui la constituent.

Chaînes et Chemins

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

- Un *chemin* d'un sommet x à un sommet y est une séquence de (au moins 2) sommets $x = x_0, x_1 \ldots, x_{n-1}, x_n = y$ dans laquelle chaque x_i admet x_{i+1} pour voisin.
- Un sommet y est *accessible* depuis x s'il existe un chemin de x à y.
- La *longueur* d'un chemin est égale au nombre d'arêtes qui la constituent.
- Un *chemin simple* est un chemin qui ne contient pas plusieurs fois une même arête/arc.

Chaînes et Chemins

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

- Un *chemin* d'un sommet x à un sommet y est une séquence de (au moins 2) sommets $x = x_0, x_1 \ldots, x_{n-1}, x_n = y$ dans laquelle chaque x_i admet x_{i+1} pour voisin.
- Un sommet y est *accessible* depuis x s'il existe un chemin de x à y.
- La *longueur* d'un chemin est égale au nombre d'arêtes qui la constituent.
- Un *chemin simple* est un chemin qui ne contient pas plusieurs fois une même arête/arc.
- Un *chemin élémentaire* est un chemin qui ne passe pas plusieurs fois par un même sommet.

Chaînes et Chemins

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

- Un *chemin* d'un sommet x à un sommet y est une séquence de (au moins 2) sommets $x = x_0, x_1 \ldots, x_{n-1}, x_n = y$ dans laquelle chaque x_i admet x_{i+1} pour voisin.
- Un sommet y est *accessible* depuis x s'il existe un chemin de x à y.
- La *longueur* d'un chemin est égale au nombre d'arêtes qui la constituent.
- Un *chemin simple* est un chemin qui ne contient pas plusieurs fois une même arête/arc.
- Un *chemin élémentaire* est un chemin qui ne passe pas plusieurs fois par un même sommet.
- élémentaire $\Longrightarrow$ simple.

Chaînes et Chemins

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

- Un *chemin* d'un sommet x à un sommet y est une séquence de (au moins 2) sommets $x = x_0, x_1 \ldots, x_{n-1}, x_n = y$ dans laquelle chaque x_i admet x_{i+1} pour voisin.
- Un sommet y est *accessible* depuis x s'il existe un chemin de x à y.
- La *longueur* d'un chemin est égale au nombre d'arêtes qui la constituent.
- Un *chemin simple* est un chemin qui ne contient pas plusieurs fois une même arête/arc.
- Un *chemin élémentaire* est un chemin qui ne passe pas plusieurs fois par un même sommet.
- élémentaire $\Longrightarrow$ simple.
- En CPGE dans les exercices les chaînes sont souvent élémentaires (pas de doublon de sommet sauf pour définir les cycles).

Chaînes et Chemins

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

- Un *chemin* d'un sommet x à un sommet y est une séquence de (au moins 2) sommets $x = x_0, x_1 \ldots, x_{n-1}, x_n = y$ dans laquelle chaque x_i admet x_{i+1} pour voisin.
- Un sommet y est *accessible* depuis x s'il existe un chemin de x à y.
- La *longueur* d'un chemin est égale au nombre d'arêtes qui la constituent.
- Un *chemin simple* est un chemin qui ne contient pas plusieurs fois une même arête/arc.
- Un *chemin élémentaire* est un chemin qui ne passe pas plusieurs fois par un même sommet.
- élémentaire $\Longrightarrow$ simple.
- En CPGE dans les exercices les chaînes sont souvent élémentaires (pas de doublon de sommet sauf pour définir les cycles).
- Certains auteurs utilisent le mot *chaîne* pour désigner les chemins dans les graphes non orientés.

Cycles et circuits

- Un chemin est dit *simple* si chacun de ses arcs/arêtes n'est emprunté qu'une fois.

Cycles et circuits

- Un chemin est dit *simple* si chacun de ses arcs/arêtes n'est emprunté qu'une fois.
- Un *cycle* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ est un chemin dont les extrémités sont confondues : dans l'immense majorité des cas, on impose qu'il soit simple, c'est à dire qu'aucun arc/arête n'y figure deux fois.

Cycles et circuits

- Un chemin est dit *simple* si chacun de ses arcs/arêtes n'est emprunté qu'une fois.
- Un *cycle* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ est un chemin dont les extrémités sont confondues : dans l'immense majorité des cas, on impose qu'il soit simple, c'est à dire qu'aucun arc/arête n'y figure deux fois.
- Remarque : le sommet répété peut varier. Le cycle x_0, x_1, x_2, x_0 est considéré comme égal au cycle x_1, x_2, x_0, x_1.

Cycles et circuits

- Un chemin est dit *simple* si chacun de ses arcs/arêtes n'est emprunté qu'une fois.
- Un *cycle* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ est un chemin dont les extrémités sont confondues : dans l'immense majorité des cas, on impose qu'il soit simple, c'est à dire qu'aucun arc/arête n'y figure deux fois.
- Remarque : le sommet répété peut varier. Le cycle x_0, x_1, x_2, x_0 est considéré comme égal au cycle x_1, x_2, x_0, x_1.
- Un cycle est dit *élémentaire* si, lorsqu'on enlève un arc quelconque et une extrémité de cet arc, le chemin restant est élémentaire.

Cycles et circuits

- Un chemin est dit *simple* si chacun de ses arcs/arêtes n'est emprunté qu'une fois.
- Un *cycle* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ est un chemin dont les extrémités sont confondues : dans l'immense majorité des cas, on impose qu'il soit simple, c'est à dire qu'aucun arc/arête n'y figure deux fois.
- Remarque : le sommet répété peut varier. Le cycle x_0, x_1, x_2, x_0 est considéré comme égal au cycle x_1, x_2, x_0, x_1.
- Un cycle est dit *élémentaire* si, lorsqu'on enlève un arc quelconque et une extrémité de cet arc, le chemin restant est élémentaire.
- Un graphe est *acyclique* s'il ne possède aucun cycle (simple).

Cycles et circuits

- Un chemin est dit *simple* si chacun de ses arcs/arêtes n'est emprunté qu'une fois.
- Un *cycle* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ est un chemin dont les extrémités sont confondues : dans l'immense majorité des cas, on impose qu'il soit simple, c'est à dire qu'aucun arc/arête n'y figure deux fois.
- Remarque : le sommet répété peut varier. Le cycle x_0, x_1, x_2, x_0 est considéré comme égal au cycle x_1, x_2, x_0, x_1.
- Un cycle est dit *élémentaire* si, lorsqu'on enlève un arc quelconque et une extrémité de cet arc, le chemin restant est élémentaire.
- Un graphe est *acyclique* s'il ne possède aucun cycle (simple).
- Certains auteurs distinguent la notion de *circuit* (pour les graphes orientés) de celle de *cycle* (pour les graphes non orientés).
  Dans un graphe non orienté, la plupart du temps, on considère qu'un cycle est simple et possède au moins 3 arêtes (les boucles ne sont alors pas considérées comme des cycles).

Existence de chemin élémentaire (Propriété de König)

Proposition

S'il existe un chemin de x à y dans le graphe $G = (V, E)$, alors il existe un chemin élémentaire de x à v.

Preuve en TD

Distance

- La *distance* entre deux sommets x et y d'un graphe $G = (V, E)$ orienté (resp. non orienté) est notée $d_G(x, y)$ et est égale à la longueur *d'un* plus court chemin (resp. chaîne) allant de x à y s'il en existe un ou bien $+\infty$ sinon.

Distance

- La *distance* entre deux sommets x et y d'un graphe $G = (V, E)$ orienté (resp. non orienté) est notée $d_G(x, y)$ et est égale à la longueur *d'un* plus court chemin (resp. chaîne) allant de x à y s'il en existe un ou bien $+\infty$ sinon.
- Il s'agit bien d'une *distance* au sens mathématiques. En particulier, elle vérifie l'*inégalité triangulaire*
  $\forall (x, y, z) \in V^3,\ d_G(x, z) \leq d_G(x, y) + d_G(y, z)$.

Distance

- La *distance* entre deux sommets x et y d'un graphe $G = (V, E)$ orienté (resp. non orienté) est notée $d_G(x, y)$ et est égale à la longueur *d'un* plus court chemin (resp. chaîne) allant de x à y s'il en existe un ou bien $+\infty$ sinon.
- Il s'agit bien d'une *distance* au sens mathématiques. En particulier, elle vérifie l'*inégalité triangulaire*
  $\forall (x, y, z) \in V^3,\ d_G(x, z) \leq d_G(x, y) + d_G(y, z)$.
- Le *diamètre* d'un graphe G est la valeur : $\sup_{(x,y)\in V^2} d_G(x, y)$. C'est « la longueur du plus long plus court chemin entre deux sommets ».

Relation de connexité

- La *connexité* dans un graphe non orienté est une relation binaire entre deux sommets : x et y sont en relation de connexité si et seulement si y est accessible depuis x.

Relation de connexité

- La *connexité* dans un graphe non orienté est une relation binaire entre deux sommets : x et y sont en relation de connexité si et seulement si y est accessible depuis x.
- Comme le graphe est non orienté, si y est accessible depuis x, alors x est accessible depuis y.

Relation de connexité

- La *connexité* dans un graphe non orienté est une relation binaire entre deux sommets : x et y sont en relation de connexité si et seulement si y est accessible depuis x.
- Comme le graphe est non orienté, si y est accessible depuis x, alors x est accessible depuis y.
- La connexité est une relation d'équivalence.

Relation de connexité

- La *connexité* dans un graphe non orienté est une relation binaire entre deux sommets : x et y sont en relation de connexité si et seulement si y est accessible depuis x.
- Comme le graphe est non orienté, si y est accessible depuis x, alors x est accessible depuis y.
- La connexité est une relation d'équivalence.
- Les classes d'équivalences sont appelées *composantes connexes*. La composante connexe d'un sommet x est notée ici $\dot{x}$ et vaut :

$$\dot{x} = \{y \in V \mid \text{ il existe une chaîne de } x \text{ à } y\}.$$

Relation de connexité

- La *connexité* dans un graphe non orienté est une relation binaire entre deux sommets : x et y sont en relation de connexité si et seulement si y est accessible depuis x.
- Comme le graphe est non orienté, si y est accessible depuis x, alors x est accessible depuis y.
- La connexité est une relation d'équivalence.
- Les classes d'équivalences sont appelées *composantes connexes*. La composante connexe d'un sommet x est notée ici $\dot{x}$ et vaut :

$$\dot{x} = \{y \in V \mid \text{ il existe une chaîne de } x \text{ à } y\}.$$

- Un graphe est dit *connexe* si il possède une seule composante connexe.

Relation de connexité

- La *connexité* dans un graphe non orienté est une relation binaire entre deux sommets : x et y sont en relation de connexité si et seulement si y est accessible depuis x.
- Comme le graphe est non orienté, si y est accessible depuis x, alors x est accessible depuis y.
- La connexité est une relation d'équivalence.
- Les classes d'équivalences sont appelées *composantes connexes*. La composante connexe d'un sommet x est notée ici $\dot{x}$ et vaut :

$$\dot{x} = \{y \in V \mid \text{ il existe une chaîne de } x \text{ à } y\}.$$

- Un graphe est dit *connexe* si il possède une seule composante connexe.
- La connexité est étendue aux graphes orientés en ne tenant pas compte du sens des arcs.

Relation de forte connexité

- La relation de *forte connexité* est une relation binaire entre sommets d'un graphe orienté : x et y sont en relation de forte connexité si et seulement si

  Il peut y avoir un chemin de x à y sans chemin de y à x.

Relation de forte connexité

- La relation de *forte connexité* est une relation binaire entre sommets d'un graphe orienté : x et y sont en relation de forte connexité si et seulement si
  - $x \neq y$ et il existe un chemin de x à y et il existe un chemin de y à x,

Il peut y avoir un chemin de x à y sans chemin de y à x.

Relation de forte connexité

- La relation de *forte connexité* est une relation binaire entre sommets d'un graphe orienté : x et y sont en relation de forte connexité si et seulement si
  - $x \neq y$ et il existe un chemin de x à y et il existe un chemin de y à x,
  - ou bien $x = y$.

Il peut y avoir un chemin de x à y sans chemin de y à x.

Relation de forte connexité

- La relation de *forte connexité* est une relation binaire entre sommets d'un graphe orienté : x et y sont en relation de forte connexité si et seulement si
  - $x \neq y$ et il existe un chemin de x à y et il existe un chemin de y à x,
  - ou bien $x = y$.

  Il peut y avoir un chemin de x à y sans chemin de y à x.
- Les classes d'équivalence de la relation de forte connexité sont appelées *composantes fortement connexes*.

Relation de forte connexité

- La relation de *forte connexité* est une relation binaire entre sommets d'un graphe orienté : x et y sont en relation de forte connexité si et seulement si
  - $x \neq y$ et il existe un chemin de x à y et il existe un chemin de y à x,
  - ou bien $x = y$.

  Il peut y avoir un chemin de x à y sans chemin de y à x.
- Les classes d'équivalence de la relation de forte connexité sont appelées *composantes fortement connexes*.
- La composante fortement connexe de x, notée ici $\tilde{x}$ vaut :

$$\tilde{x} = \{y \in S \mid \text{il existe un chemin de } x \text{ à } y \text{ et de } y \text{ à } x\}.$$

Relation de forte connexité

- La relation de *forte connexité* est une relation binaire entre sommets d'un graphe orienté : x et y sont en relation de forte connexité si et seulement si
  - $x \neq y$ et il existe un chemin de x à y et il existe un chemin de y à x,
  - ou bien $x = y$.

  Il peut y avoir un chemin de x à y sans chemin de y à x.
- Les classes d'équivalence de la relation de forte connexité sont appelées *composantes fortement connexes*.
- La composante fortement connexe de x, notée ici $\tilde{x}$ vaut :

$$\tilde{x} = \{y \in S \mid \text{il existe un chemin de } x \text{ à } y \text{ et de } y \text{ à } x\}.$$

- Elle vérifie $\tilde{x} \subset \dot{x}$. **L'inclusion réciproque est en général fausse.**

Relation de forte connexité

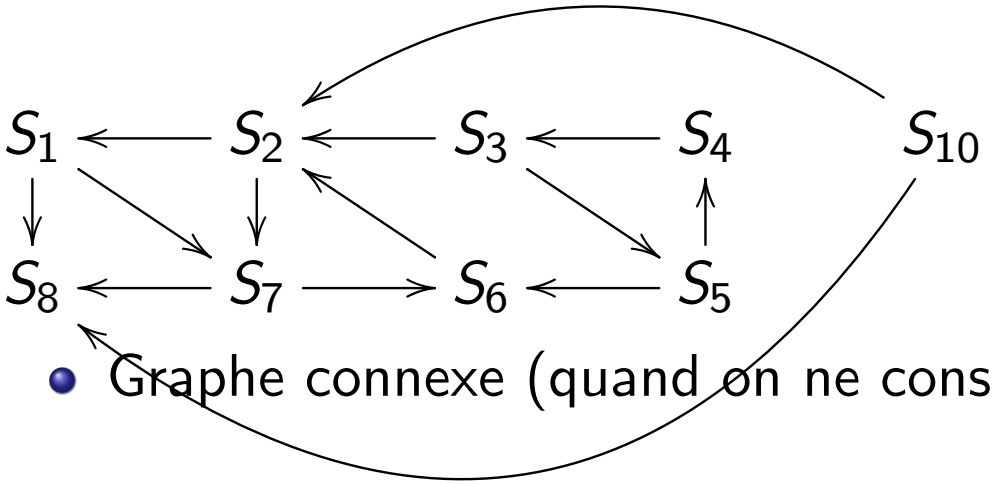
- La relation de *forte connexité* est une relation binaire entre sommets d'un graphe orienté : x et y sont en relation de forte connexité si et seulement si
  - $x \neq y$ et il existe un chemin de x à y et il existe un chemin de y à x,
  - ou bien $x = y$.

  Il peut y avoir un chemin de x à y sans chemin de y à x.
- Les classes d'équivalence de la relation de forte connexité sont appelées *composantes fortement connexes*.
- La composante fortement connexe de x, notée ici $\tilde{x}$ vaut :

$$\tilde{x} = \{y \in S \mid \text{il existe un chemin de } x \text{ à } y \text{ et de } y \text{ à } x\}.$$

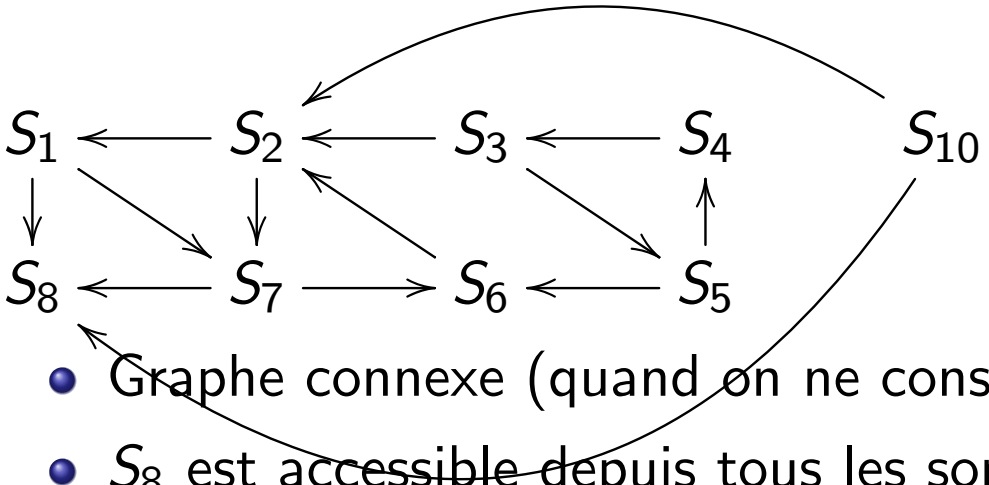
- Elle vérifie $\tilde{x} \subset \dot{x}$. **L'inclusion réciproque est en général fausse.**
- On dit qu'un graphe est *fortement connexe* si et seulement si il est constitué d'une seule composante fortement connexe, c'est à dire si pour tout couple de sommet (x, y) il existe un chemin allant de x à y et réciproquement.

Connexité : exemple



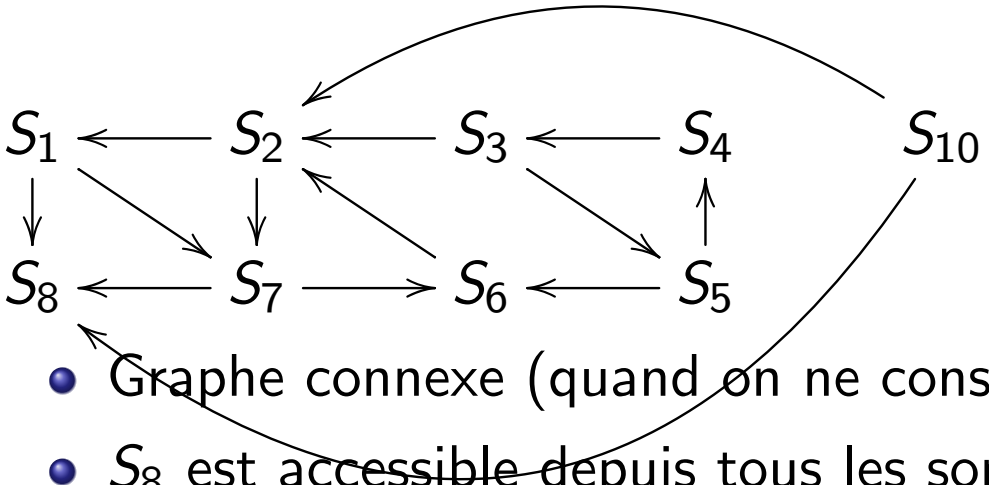
- Graphe connexe (quand on ne considère pas le sens des flèches).

Connexité : exemple



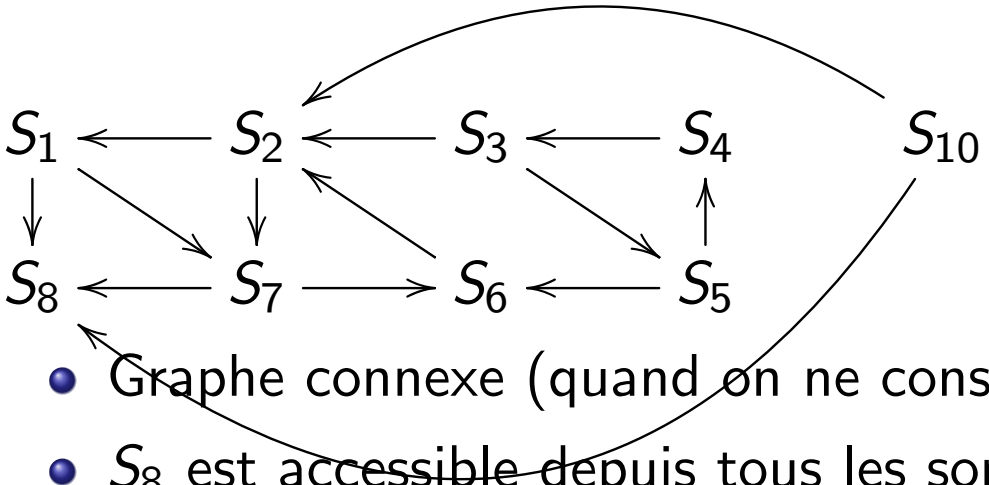
- Graphe connexe (quand on ne considère pas le sens des flèches).
- S_8 est accessible depuis tous les sommets.

Connexité : exemple



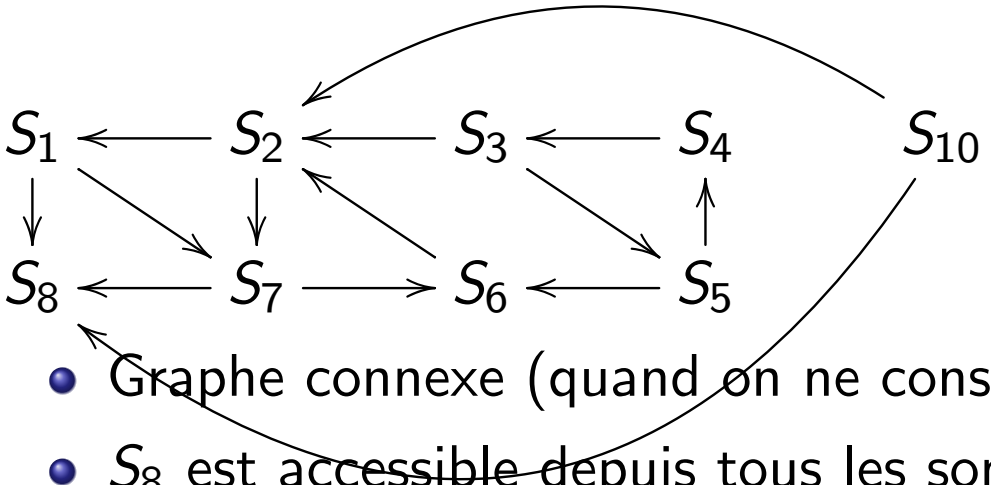
- Graphe connexe (quand on ne considère pas le sens des flèches).
- S_8 est accessible depuis tous les sommets.
- $\tilde{S_8} = \{S_8\}$. Donc le graphe n'est pas fortement connexe, sinon $\tilde{S_8}$ contiendrait tous les sommets.

Connexité : exemple



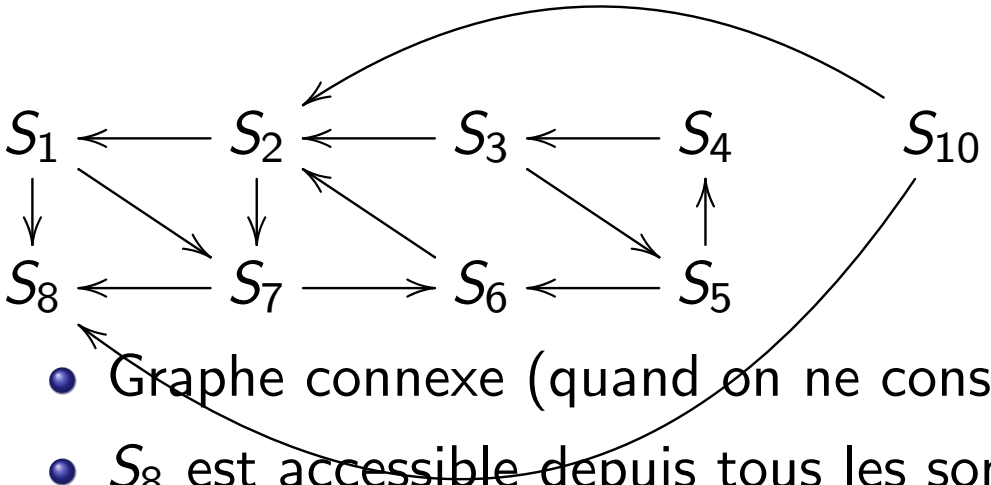
- Graphe connexe (quand on ne considère pas le sens des flèches).
- S_8 est accessible depuis tous les sommets.
- $\tilde{S_8} = \{S_8\}$. Donc le graphe n'est pas fortement connexe, sinon $\tilde{S_8}$ contiendrait tous les sommets.
- Sommets accessibles depuis S_2 : $\{S_1, S_2, S_6, S_7, S_8\}$.

Connexité : exemple



- Graphe connexe (quand on ne considère pas le sens des flèches).
- S_8 est accessible depuis tous les sommets.
- $\tilde{S_8} = \{S_8\}$. Donc le graphe n'est pas fortement connexe, sinon $\tilde{S_8}$ contiendrait tous les sommets.
- Sommets accessibles depuis S_2 : $\{S_1, S_2, S_6, S_7, S_8\}$.
- Sommets coaccessibles depuis S_2 : $\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_{10}\}$.

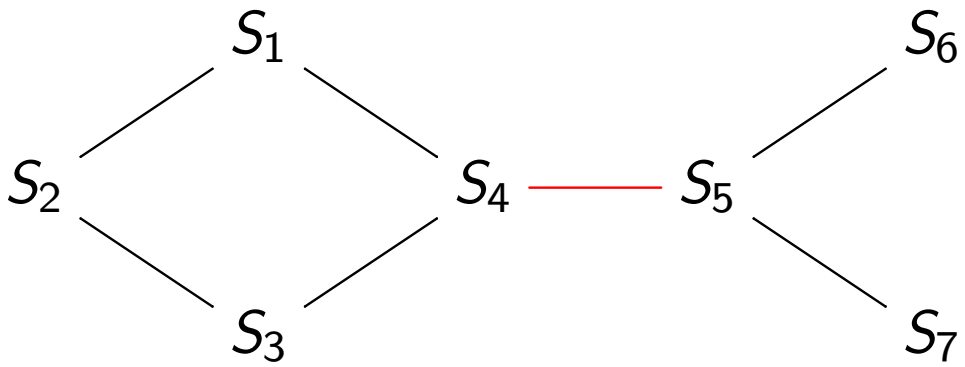
Connexité : exemple



- Graphe connexe (quand on ne considère pas le sens des flèches).
- S_8 est accessible depuis tous les sommets.
- $\tilde{S_8} = \{S_8\}$. Donc le graphe n'est pas fortement connexe, sinon $\tilde{S_8}$ contiendrait tous les sommets.
- Sommets accessibles depuis S_2 : $\{S_1, S_2, S_6, S_7, S_8\}$.
- Sommets coaccessibles depuis S_2 : $\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_{10}\}$.
- $\tilde{S_2} = \{S_1, S_2, S_6, S_7\}$ est l'intersection des accessibles et des coaccessibles.

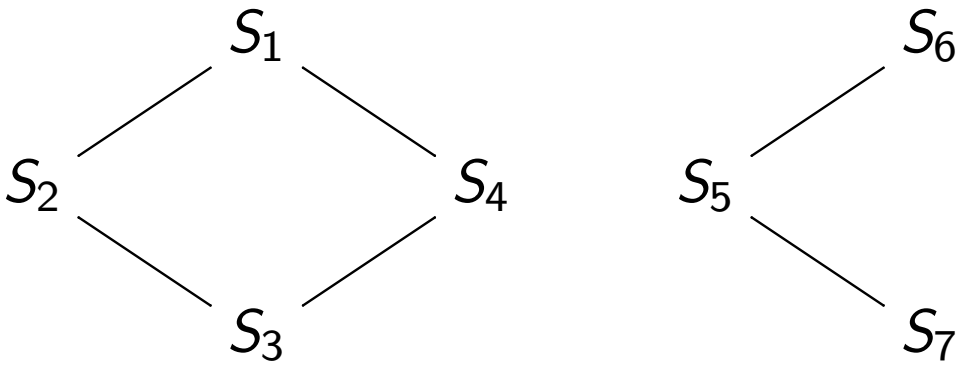
Isthme

Une arête u d'un graphe G non orienté est appelée un *isthme* si sa suppression met ses extrémités dans deux composantes connexes différentes (donc la suppression augmente le nombre de composante connexes du graphe).



Une seule composante connexe.

Isthme



Deux composantes connexes après suppression de $\{S_4, S_5\}$.

Isthme

Proposition

Soit G un graphe non orienté.
Une arête u est un isthme si et seulement si u n'appartient à aucun cycle (simple) de G.

Preuve

Soit $u = \{x, y\}$ une arête avec $x \neq y$. On montre que u est un isthme si et seulement si u n'appartient à aucun cycle de G

- Supposons que u soit un isthme. Supprimer u met x, y dans deux composantes connexes différentes. Cela veut dire qu'il n'existe pas de chemin de x à y qui ne passe pas par u. Et donc, u n'est sur aucun cycle.

Preuve

Soit $u = \{x, y\}$ une arête avec $x \neq y$. On montre que u est un isthme si et seulement si u n'appartient à aucun cycle de G

- Supposons que u soit un isthme. Supprimer u met x, y dans deux composantes connexes différentes. Cela veut dire qu'il n'existe pas de chemin de x à y qui ne passe pas par u. Et donc, u n'est sur aucun cycle.
- Si u n'appartient à aucun cycle, supposons qu'il y ait un chemin allant de x à y ne passant pas par u (on peut le prendre élémentaire). En y ajoutant u, on obtient un cycle passant par u : ABSURDE.
  Si on supprime u, on ne peut donc plus joindre y depuis x. Alors x, y sont dans deux CC différentes après suppression de u. On en déduit que u est un istme.

Nombre d'arêtes et de sommets

Proposition

Soit G un graphe non orienté sans boucle de n sommets et p arêtes.

1. *G connexe $\Longrightarrow$ $p \geq n-1$,*

Corollaire

Si G non orienté sans boucle est acyclique connexe, alors $p = n-1$.

Remarque

Ce sont des conditions nécessaires, pas suffisantes (exo : donner des contre-exemples).

Nombre d'arêtes et de sommets

Proposition

Soit G un graphe non orienté sans boucle de n sommets et p arêtes.

1. *G connexe $\Longrightarrow$ $p \geq n-1$,*
2. *G acyclique (i.e. pas de cycle simple) $\Longrightarrow$ $p \leq n-1$.*

Corollaire

Si G non orienté sans boucle est acyclique connexe, alors $p = n-1$.

Remarque

Ce sont des conditions nécessaires, pas suffisantes (exo : donner des contre-exemples).

Preuve : si $G = (V, E)$ non orienté est connexe, $p \geq n - 1$.

Par récurrence sur n :

- Vrai si $n = 1$. En effet $1 \geq p \geq 0$. Le graphe est connexe et $p \geq n - 1$.

Preuve : si $G = (V, E)$ est connexe non orienté, $p \geq n - 1$.

Hérédité.

- Si $P(n)$ pour un $n \geq 1$, soit G connexe à $n + 1$ sommets. Tout sommet possède au moins une arête incidente car G est connexe.

Preuve : si $G = (V, E)$ est connexe non orienté, $p \geq n - 1$.

Hérédité.

- Si $P(n)$ pour un $n \geq 1$, soit G connexe à $n+1$ sommets. Tout sommet possède au moins une arête incidente car G est connexe.
  - Si G possède un sommet x de degré $d(x) = 1$, x n'est sur aucune chaîne simple joignant deux autres sommets. On supprime x et son unique arrête adjacente : le sous-graphe G' obtenu est connexe à n sommets. Par HR le nombre d'arêtes de G' est $p' \geq n - 1$. En remettant l'arête de x, on a au moins $(n+1) - 1$ arêtes dans G.

Preuve : si $G = (V, E)$ est connexe non orienté, $p \geq n - 1$.

Hérédité.

- Si $P(n)$ pour un $n \geq 1$, soit G connexe à $n+1$ sommets. Tout sommet possède au moins une arête incidente car G est connexe.
  - Si G possède un sommet x de degré $d(x) = 1$, x n'est sur aucune chaîne simple joignant deux autres sommets. On supprime x et son unique arrête adjacente : le sous-graphe G' obtenu est connexe à n sommets. Par HR le nombre d'arêtes de G' est $p' \geq n - 1$. En remettant l'arête de x, on a au moins $(n+1) - 1$ arêtes dans G.
  - Sinon, tous les degrés sont ≥ 2. La somme des degrés dans un graphe non orienté est $\sum_{x \in V} d(x) = 2p$ car toutes les arêtes sont comptées deux fois. On a donc

$$2p = \sum_{x \in V} \underbrace{d(x)}_{\geq 2} \geq 2\,|V| = 2n + 2$$

Donc $p \geq n + 1 \geq (n+1) - 1$. OK

Si G N.O. sans boucle a au moins n arêtes, il n'est pas acyclique (cas de base)

On raisonne par récurrence forte sur $|V| = n$.

- Précisons : pas de cycle simple : x_0, x_1, x_0 n'est pas un cycle car la même arête est emprunté deux fois

Si G N.O. sans boucle a au moins n arêtes, il n'est pas acyclique (cas de base)

On raisonne par récurrence forte sur $|V| = n$.

- Précisons : pas de cycle simple : x_0, x_1, x_0 n'est pas un cycle car la même arête est emprunté deux fois
- Si le graphe (qui est sans boucle) a au plus deux sommets, il ne possède pas de cycle simple puisqu'il y a au plus une arête qu'on ne peut pas emprunter deux fois (en CPGE, il n'y a pas de multigraphe : il existe au plus une arête entre deux sommets).

Si G N.O. sans boucle a au moins n arêtes, il n'est pas acyclique (cas de base)

On raisonne par récurrence forte sur $|V| = n$.

- Précisons : pas de cycle simple : x_0, x_1, x_0 n'est pas un cycle car la même arête est emprunté deux fois
- Si le graphe (qui est sans boucle) a au plus deux sommets, il ne possède pas de cycle simple puisqu'il y a au plus une arête qu'on ne peut pas emprunter deux fois (en CPGE, il n'y a pas de multigraphe : il existe au plus une arête entre deux sommets).
- Pour $n = 3$. S'il y a 3 arêtes, le graphe tout entier est un cycle.

Si G N.O. sans boucle a au moins n arêtes, il n'est pas acyclique (hérédité (1))

On considère des graphes NO à au moins 3 sommets. On raisonne par récurrence forte sur $|G| = n$.
Supposons $P(k)$ pour $k \geq 3$ et tout $k \leq n$. Soit G à $n+1$ sommets et $p = n+1$ arêtes. On montre qu'il possède un cycle. Considérons un sommet quelconque x.

- S'il n'y a pas d'arête incidente à x, le graphe privé de x a n sommets et $n+1$ arêtes. Il y a un cycle par HR.

Si G N.O. sans boucle a au moins n arêtes, il n'est pas acyclique (hérédité (1))

On considère des graphes NO à au moins 3 sommets. On raisonne par récurrence forte sur $|G| = n$.
Supposons $P(k)$ pour $k \geq 3$ et tout $k \leq n$. Soit G à $n+1$ sommets et $p = n+1$ arêtes. On montre qu'il possède un cycle. Considérons un sommet quelconque x.

- S'il n'y a pas d'arête incidente à x, le graphe privé de x a n sommets et $n+1$ arêtes. Il y a un cycle par HR.
- Si il existe une arête incidente à x qui n'est pas un isthme elle est alors sur un cycle et G possède donc un cycle : OK.

Si G N.O. sans boucle a au moins n arêtes, il n'est pas acyclique (hérédité (2))

Considérons un sommet quelconque x du graphe à $n+1$ sommets et autant d'arêtes.

- Si toutes arête x-incidente est un isthme, soit $u = \{x, y\} \in A$.
  Retirons u. Alors x se retrouve dans une composante connexe différente de celle de y.
  Séparons la composante connexe de x et ses arêtes (formant un sous graphe G_1) du reste du graphe (notons G_2 ce reste).

Si G N.O. sans boucle a au moins n arêtes, il n'est pas acyclique (hérédité (2))

Considérons un sommet quelconque x du graphe à $n+1$ sommets et autant d'arêtes.

- Si toutes arête x-incidente est un isthme, soit $u = \{x, y\} \in A$.
  Retirons u. Alors x se retrouve dans une composante connexe différente de celle de y.
  Séparons la composante connexe de x et ses arêtes (formant un sous graphe G_1) du reste du graphe (notons G_2 ce reste).
  - G_1 possède , disons k sommets ($1 \leq k < n+1$), l'autre $n+1-k$. G_1 possède q_1 arêtes et G_2 en a q_2 avec $q_1 + q_2 = n$.

Si G N.O. sans boucle a au moins n arêtes, il n'est pas acyclique (hérédité (2))

Considérons un sommet quelconque x du graphe à $n+1$ sommets et autant d'arêtes.

- Si toutes arête x-incidente est un isthme, soit $u = \{x, y\} \in A$.
  Retirons u. Alors x se retrouve dans une composante connexe différente de celle de y.
  Séparons la composante connexe de x et ses arêtes (formant un sous graphe G_1) du reste du graphe (notons G_2 ce reste).
  - G_1 possède , disons k sommets ($1 \leq k < n+1$), l'autre $n+1-k$. G_1 possède q_1 arêtes et G_2 en a q_2 avec $q_1 + q_2 = n$.
  - Si $q_1 \geq k$, il y a un cycle dans G_1 par HR donc dans G puisque G_1 est un sous-graphe de G : Prouvé.

Si G N.O. sans boucle a au moins n arêtes, il n'est pas acyclique (hérédité (2))

Considérons un sommet quelconque x du graphe à $n+1$ sommets et autant d'arêtes.

- Si toutes arête x-incidente est un isthme, soit $u = \{x, y\} \in A$.
  Retirons u. Alors x se retrouve dans une composante connexe différente de celle de y.
  Séparons la composante connexe de x et ses arêtes (formant un sous graphe G_1) du reste du graphe (notons G_2 ce reste).
  - G_1 possède , disons k sommets ($1 \leq k < n+1$), l'autre $n+1-k$. G_1 possède q_1 arêtes et G_2 en a q_2 avec $q_1 + q_2 = n$.
  - Si $q_1 \geq k$, il y a un cycle dans G_1 par HR donc dans G puisque G_1 est un sous-graphe de G : Prouvé.
  - Sinon, $q_2 = n - q_1 > n - k$ donc $q_2 \geq (n-k)+1$ et le sous-graphe G_2 par HR a un cycle donc G aussi. CQFD

Caractérisation des arbres non enracinés

Définition

On appelle *arbre non enraciné* tout graphe non orienté sans boucle acyclique et connexe.

Remarque

On dit en général *arbre* plutôt que *arbre non enraciné* mais cette appelation amène des confusions avec la notion d'arbre définie inductivement des chapitres précédents.

Caractérisation des arbres non enracinés

Proposition

Soit un graphe non orienté sans boucle G de n sommets et p arêtes, les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. *G est un arbre non enraciné,*

Caractérisation des arbres non enracinés

Proposition

Soit un graphe non orienté sans boucle G de n sommets et p arêtes, les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. *G est un arbre non enraciné,*
2. *G est acyclique et $p = n - 1$.*

Caractérisation des arbres non enracinés

Proposition

Soit un graphe non orienté sans boucle G de n sommets et p arêtes, les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. *G est un arbre non enraciné,*
2. *G est acyclique et $p = n - 1$.*
3. *G est connexe et $p = n - 1$.*

Caractérisation des arbres non enracinés

Proposition

Soit un graphe non orienté sans boucle G de n sommets et p arêtes, les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. *G est un arbre non enraciné,*
2. *G est acyclique et $p = n - 1$.*
3. *G est connexe et $p = n - 1$.*

- On a déjà vu 1 $\Longrightarrow$ 2 et 1 $\Longrightarrow$ 3. On montre que 2 $\Longleftrightarrow$ 3 dans les transparents suivants.

Caractérisation des arbres non enracinés

Proposition

Soit un graphe non orienté sans boucle G de n sommets et p arêtes, les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. *G est un arbre non enraciné,*
2. *G est acyclique et $p = n - 1$.*
3. *G est connexe et $p = n - 1$.*

- On a déjà vu 1 $\Longrightarrow$ 2 et 1 $\Longrightarrow$ 3. On montre que 2 $\Longleftrightarrow$ 3 dans les transparents suivants.
- Si cette équivalence est avérée, alors un graphe N.O. acyclique sans boucle à $p = n - 1$ arêtes est aussi connexe. Donc c'est un arbre non enraciné.

Preuve

Si G acyclique N.O. (donc sans boucle) et $p = n - 1$

- Si x, y sont deux éléments non reliés par un chemin, on ajoute l'arête $\{x, y\}$

Preuve

Si G acyclique N.O. (donc sans boucle) et $p = n - 1$

- Si x, y sont deux éléments non reliés par un chemin, on ajoute l'arête $\{x, y\}$
- Cela crée un cycle puisque le nombre d'arête est égal à celui des sommets.

Preuve

Si G acyclique N.O. (donc sans boucle) et $p = n - 1$

- Si x, y sont deux éléments non reliés par un chemin, on ajoute l'arête $\{x, y\}$
- Cela crée un cycle puisque le nombre d'arête est égal à celui des sommets.
- Ce nouveau cycle passe par l'arête $\{x, y\}$ (avant, il n'y en avait pas).

Preuve

Si G acyclique N.O. (donc sans boucle) et $p = n - 1$

- Si x, y sont deux éléments non reliés par un chemin, on ajoute l'arête $\{x, y\}$
- Cela crée un cycle puisque le nombre d'arête est égal à celui des sommets.
- Ce nouveau cycle passe par l'arête $\{x, y\}$ (avant, il n'y en avait pas).
- Puisque cycle il y a, c'est que x et y sont joignables sans passer par $\{x, y\}$: Absurde.

Preuve

Si G acyclique N.O. (donc sans boucle) et $p = n - 1$

- Si x, y sont deux éléments non reliés par un chemin, on ajoute l'arête $\{x, y\}$
- Cela crée un cycle puisque le nombre d'arête est égal à celui des sommets.
- Ce nouveau cycle passe par l'arête $\{x, y\}$ (avant, il n'y en avait pas).
- Puisque cycle il y a, c'est que x et y sont joignables sans passer par $\{x, y\}$: Absurde.
- Donc pour tous sommets x et y, il ya un chemin de l'un à l'autre : G est donc connexe.

Preuve

Si G est connexe sans boucle N.O. et $p = n - 1$

- Si G possède un cycle, soit $\{x, y\}$ une arête de ce cycle.

Preuve

Si G est connexe sans boucle N.O. et $p = n - 1$

- Si G possède un cycle, soit $\{x, y\}$ une arête de ce cycle.
- Alors il y a un autre chemin de x à y que cette arête. Donc on peut enlever l'arête $\{x, y\}$ en conservant le caractère connexe.

Preuve

Si G est connexe sans boucle N.O. et $p = n - 1$

- Si G possède un cycle, soit $\{x, y\}$ une arête de ce cycle.
- Alors il y a un autre chemin de x à y que cette arête. Donc on peut enlever l'arête $\{x, y\}$ en conservant le caractère connexe.
- Mais alors le nouveau graphe G' est encore connexe et possède n sommets et $n - 2$ arêtes. ABSURDE

Fin de la preuve

Si G est connexe sans boucle N.O. et $p = n - 1$

- Alors G est aussi acyclique.

Fin de la preuve

Si G est connexe sans boucle N.O. et $p = n - 1$

- Alors G est aussi acyclique.
- Et comme graphe connexe acyclique N.O., G est un arbre.

Arbres et forêts

- Pour certains auteurs, un *arbre* est un graphe non orienté connexe et acyclique sans boucle. S'il a n sommets, il possède donc $n-1$ arêtes.

Arbres et forêts

- Pour certains auteurs, un *arbre* est un graphe non orienté connexe et acyclique sans boucle. S'il a n sommets, il possède donc $n-1$ arêtes.
- Comme il y a conflit avec la définition du cours, ces graphes non orientés connexes acycliques sont dits *arbres non enracinés* (on l'a déjà vu).
  À contrario, on parle des objets du premier chapitre (définis inductivement) comme des *arbres*.

Arbres et forêts

- Pour certains auteurs, un *arbre* est un graphe non orienté connexe et acyclique sans boucle. S'il a n sommets, il possède donc $n-1$ arêtes.
- Comme il y a conflit avec la définition du cours, ces graphes non orientés connexes acycliques sont dits *arbres non enracinés* (on l'a déjà vu).
  À contrario, on parle des objets du premier chapitre (définis inductivement) comme des *arbres*.
- Dans un arbre non enraciné, on peut choisir une *racine*. Il y a alors un chemin unique de la racine à tous les sommets (cela se montre). La présence de la racine induit alors une orientation.
  La structure ainsi construite est ce que certains auteurs appellent *arborescence* ou *arbre enraciné* (cf def 6)

Arbres et forêts

- Pour certains auteurs, un *arbre* est un graphe non orienté connexe et acyclique sans boucle. S'il a n sommets, il possède donc $n-1$ arêtes.
- Comme il y a conflit avec la définition du cours, ces graphes non orientés connexes acycliques sont dits *arbres non enracinés* (on l'a déjà vu).
  À contrario, on parle des objets du premier chapitre (définis inductivement) comme des *arbres*.
- Dans un arbre non enraciné, on peut choisir une *racine*. Il y a alors un chemin unique de la racine à tous les sommets (cela se montre). La présence de la racine induit alors une orientation.
  La structure ainsi construite est ce que certains auteurs appellent *arborescence* ou *arbre enraciné* (cf def 6)
- Une arborescence n'est pas encore un des objets que nous manipulons sous le nom d'*arbres*. Il n'y a pas, dans les arborescences de notion comme *fils gauche* et *fils droit*. Il manque une notion de *latéralisation*.

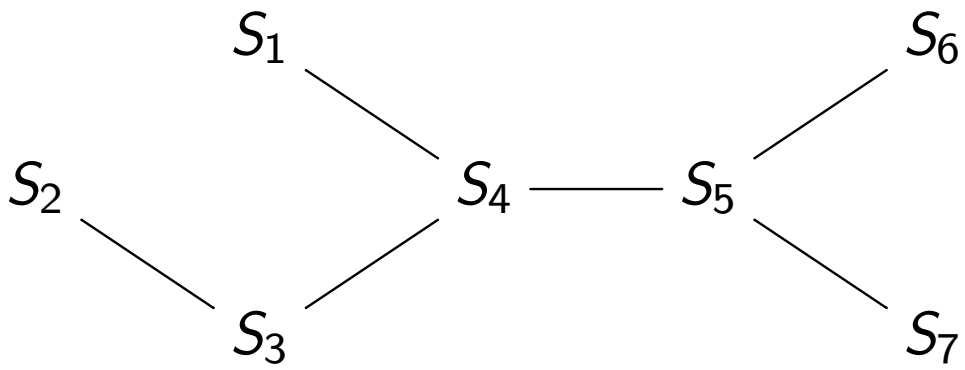
Forêts

Une *forêt* est un graphe non orienté acyclique sans boucle, c'est une union disjointe d'arbres non enracinés (qui en sont les composantes connexes).

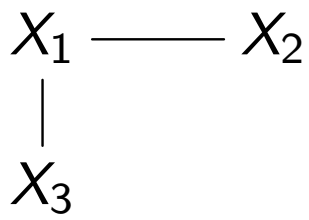
Exemples

Une forêt

Un arbre non enraciné



Un autre



Racine, arborescence

Définition

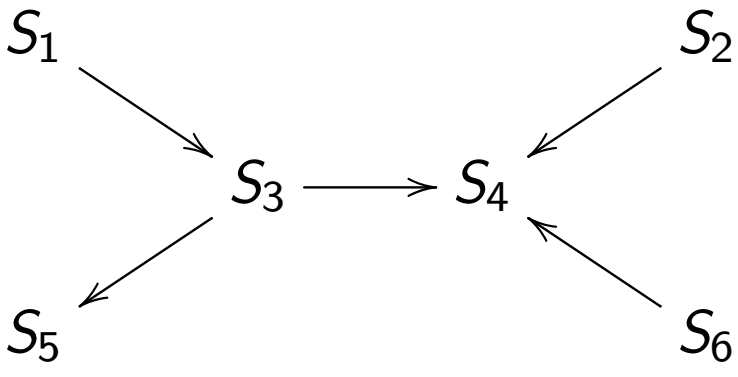
- Un sommet r d'un graphe orienté $G = (V, E)$ est une *racine* de G si pour tout sommet x de G il existe un chemin de r à x.

Racine, arborescence

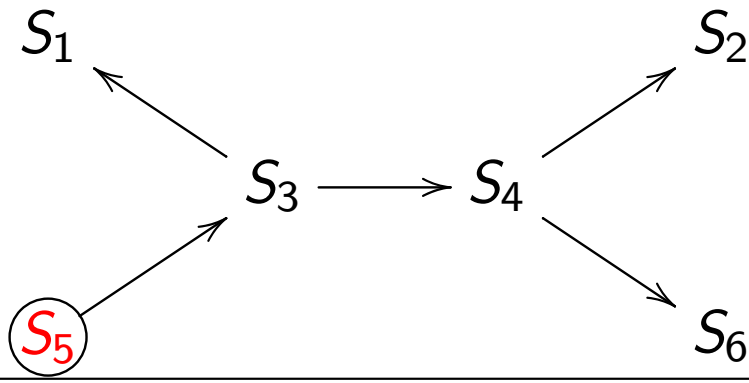
Définition

- Un sommet r d'un graphe orienté $G = (V, E)$ est une *racine* de G si pour tout sommet x de G il existe un chemin de r à x.
- On dit qu'un graphe orienté $G = (V, E)$ est une *arborescence* s'il possède un unique élément x_0 de degré entrant nul, si tous les autres sont de degré entrant 1 et si il existe un chemin de x_0 à tous les autres sommets.

Exemples



Pas de racine



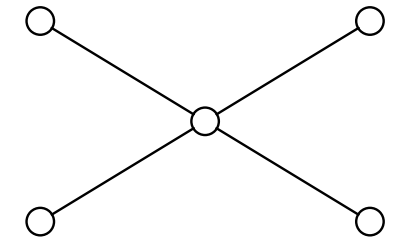
Une arborescence (racine : S_5)

Statut de cette section

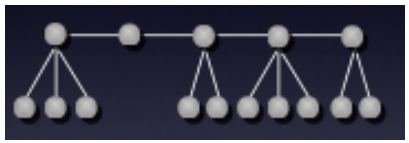
Cette section donne quelques exemples de graphes particuliers sans qu'aucune preuve ne soit donnée.

Étoiles, peignes, chenilles

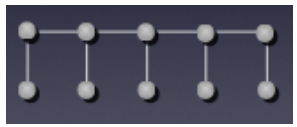
Étoile : un arbre dont un sommet est adjacent à tous les autres.



Chenille : arbre tel que tout sommet de degré ≥ 2 est adjacent à au plus deux sommets de degré ≥ 2.



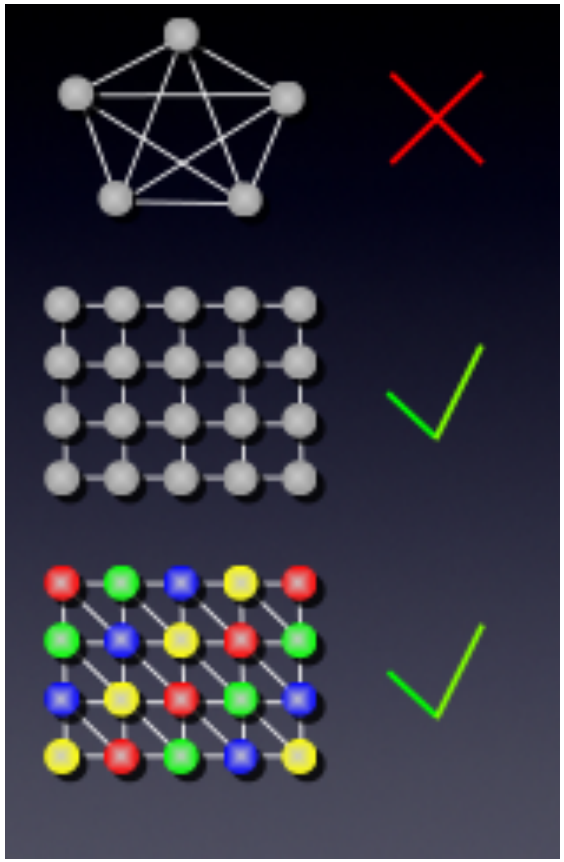
Peigne : chenille dont les sommets sont de degré 1 ou 3 sauf exactement deux sommets qui sont de degré 2.



Graphe planaire

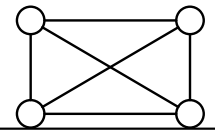
Un graphe est *planaire*
si on peut le dessiner sans
qu'aucune arête n'en coupe
une autre.

4-coloriabilité :
les sommets d'un graphe planaire
peuvent être coloriés
avec 4 couleurs sans
que deux sommets adjacents
ne soient de la même couleur.

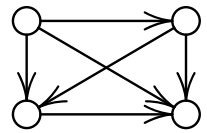


Graphe complet, tournoi

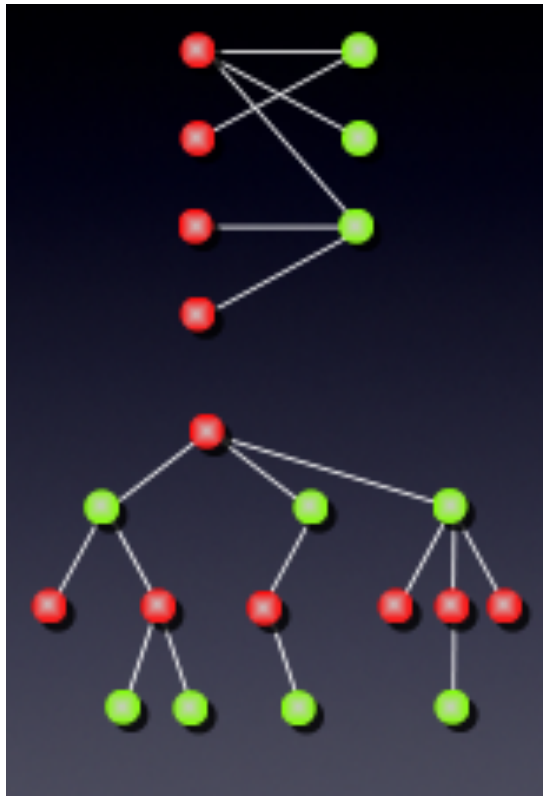
Un *graphe complet* est un graphe
non orienté où
tous les sommets sont deux à deux adjacents.



Un *tournoi* est un graphe orienté
obtenu à partir d'un graphe complet
en orientant chaque arête.



Graphe biparti



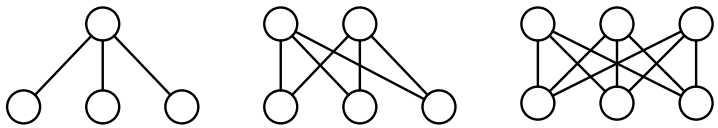
Un graphe *biparti* $G = (V, E)$
est un graphe (orienté ou non orienté)
admettant une partition $\{P_1, P_2\}$
de ses sommets telle que
$\{x, y\} \in E \implies (x, y) \in P_1 \times P_2 \cup P_2 \times P_1$

Les arbres (et plus généralement les forêts)
sont des graphes bipartis.

Graphe biparti complet

Un graphe est dit *biparti complet* (ou encore est appelé une *biclique*) s'il est biparti et contient le nombre maximal d'arêtes.
Si P_1 est de cardinal m et P_2 est de cardinal n le graphe biparti complet est noté $K_{m,n}$.

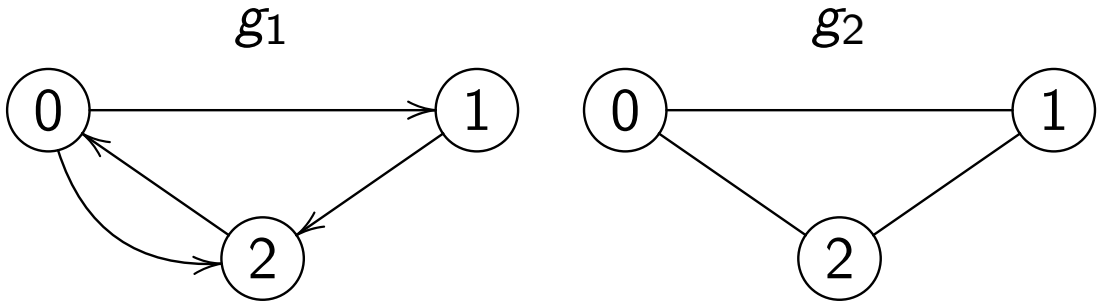
$K_{3,1}$ $K_{3,2}$ $K_{3,3}$



Liste d'adjacence

```
type graphe = int list array;;
(*graphe orienté*)
let g1 = [|[1;2];[2];[0]|];;
(*graphe non orienté*)
let g2 = [|[1;2];[2;0];[0;1]|];;
```

Les sommets sont numérotés de 0 à $|g| - 1$.

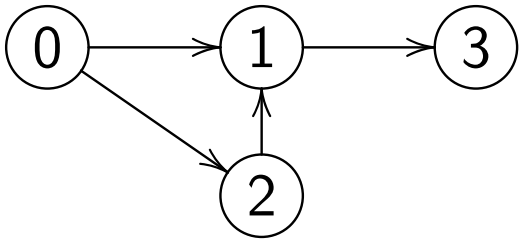


Voir TD pour les exercices

Matrice d'adjacence

```
type graphe = int array array;;

let g = Array.make_matrix 4 4 0;;
g.(0).(1)<-1;g.(0).(2)<-1;g.(1).(3)<-1;g.(2).(1)<-1;;
```



Voir TD pour les exercices

Définition

- En théorie des graphes, un *parcours de graphe* est un algorithme consistant à explorer les sommets d'un graphe de proche en proche à partir d'un sommet initial. Un cas particulier important est le parcours d'arbre.

Définition

- En théorie des graphes, un *parcours de graphe* est un algorithme consistant à explorer les sommets d'un graphe de proche en proche à partir d'un sommet initial. Un cas particulier important est le parcours d'arbre.
- Un parcours d'un graphe permet de choisir, à partir des sommets visités, le sommet suivant à visiter.

Définition

- En théorie des graphes, un *parcours de graphe* est un algorithme consistant à explorer les sommets d'un graphe de proche en proche à partir d'un sommet initial. Un cas particulier important est le parcours d'arbre.
- Un parcours d'un graphe permet de choisir, à partir des sommets visités, le sommet suivant à visiter.
- Le problème consiste à déterminer un ordre sur les visites des sommets.

Définition

- En théorie des graphes, un *parcours de graphe* est un algorithme consistant à explorer les sommets d'un graphe de proche en proche à partir d'un sommet initial. Un cas particulier important est le parcours d'arbre.
- Un parcours d'un graphe permet de choisir, à partir des sommets visités, le sommet suivant à visiter.
- Le problème consiste à déterminer un ordre sur les visites des sommets.
- Une fois le choix fait, l'ordre des visites induit une numérotation des sommets visités (l'ordre de leur découverte) et un choix sur l'arc ou l'arête utilisé pour atteindre un nouveau sommet à partir des sommets déjà visités.

Définition

- En théorie des graphes, un *parcours de graphe* est un algorithme consistant à explorer les sommets d'un graphe de proche en proche à partir d'un sommet initial. Un cas particulier important est le parcours d'arbre.
- Un parcours d'un graphe permet de choisir, à partir des sommets visités, le sommet suivant à visiter.
- Le problème consiste à déterminer un ordre sur les visites des sommets.
- Une fois le choix fait, l'ordre des visites induit une numérotation des sommets visités (l'ordre de leur découverte) et un choix sur l'arc ou l'arête utilisé pour atteindre un nouveau sommet à partir des sommets déjà visités.
- Les arcs ou arêtes distingués forment une arborescence ou un arbre, et les numéros des sommets sont croissants sur les chemins de l'arborescence ou les chaînes de l'arbre depuis la racine.

Finalité

Les algorithmes de parcours ne sont pas une fin en eux-mêmes. Ils servent comme outil pour étudier une propriété globale du graphe, par exemple :

- Connexité et forte connexité

Finalité

Les algorithmes de parcours ne sont pas une fin en eux-mêmes. Ils servent comme outil pour étudier une propriété globale du graphe, par exemple :

- Connexité et forte connexité
- Existence d'un circuit ou d'un cycle. En l'absence de cycle : définition d'un ordre total sur les sommets compatible avec le sens des arcs (ce qu'on appelle tri topologique)

Finalité

Les algorithmes de parcours ne sont pas une fin en eux-mêmes. Ils servent comme outil pour étudier une propriété globale du graphe, par exemple :

- Connexité et forte connexité
- Existence d'un circuit ou d'un cycle. En l'absence de cycle : définition d'un ordre total sur les sommets compatible avec le sens des arcs (ce qu'on appelle tri topologique)
- Calcul des plus courts chemins (notamment l'algorithme de Dijkstra)

Finalité

Les algorithmes de parcours ne sont pas une fin en eux-mêmes. Ils servent comme outil pour étudier une propriété globale du graphe, par exemple :

- Connexité et forte connexité
- Existence d'un circuit ou d'un cycle. En l'absence de cycle : définition d'un ordre total sur les sommets compatible avec le sens des arcs (ce qu'on appelle tri topologique)
- Calcul des plus courts chemins (notamment l'algorithme de Dijkstra)
- Calcul d'un arbre recouvrant (notamment l'algorithme de Prim)

Finalité

Les algorithmes de parcours ne sont pas une fin en eux-mêmes. Ils servent comme outil pour étudier une propriété globale du graphe, par exemple :

- Connexité et forte connexité
- Existence d'un circuit ou d'un cycle. En l'absence de cycle : définition d'un ordre total sur les sommets compatible avec le sens des arcs (ce qu'on appelle tri topologique)
- Calcul des plus courts chemins (notamment l'algorithme de Dijkstra)
- Calcul d'un arbre recouvrant (notamment l'algorithme de Prim)
- Algorithmes pour les flots maximums (comme l'algorithme de Ford-Fulkerson).

Finalité

Les algorithmes de parcours ne sont pas une fin en eux-mêmes. Ils servent comme outil pour étudier une propriété globale du graphe, par exemple :

- Connexité et forte connexité
- Existence d'un circuit ou d'un cycle. En l'absence de cycle : définition d'un ordre total sur les sommets compatible avec le sens des arcs (ce qu'on appelle tri topologique)
- Calcul des plus courts chemins (notamment l'algorithme de Dijkstra)
- Calcul d'un arbre recouvrant (notamment l'algorithme de Prim)
- Algorithmes pour les flots maximums (comme l'algorithme de Ford-Fulkerson).
- Coloration des sommets etc.

Analyse

- La difficulté de l'exploration consiste à éviter de visiter plusieurs fois un même sommet. Pour cela on met en oeuvre un marquage des sommets par des couleurs.

Analyse

- La difficulté de l'exploration consiste à éviter de visiter plusieurs fois un même sommet. Pour cela on met en oeuvre un marquage des sommets par des couleurs.
- Lors d'une exploration, chaque sommet passe par trois couleurs :

Analyse

- La difficulté de l'exploration consiste à éviter de visiter plusieurs fois un même sommet. Pour cela on met en oeuvre un marquage des sommets par des couleurs.
- Lors d'une exploration, chaque sommet passe par trois couleurs :
  - bleu tant que la visite du sommet n'a pas commencée

Analyse

- La difficulté de l'exploration consiste à éviter de visiter plusieurs fois un même sommet. Pour cela on met en oeuvre un marquage des sommets par des couleurs.
- Lors d'une exploration, chaque sommet passe par trois couleurs :
  - bleu tant que la visite du sommet n'a pas commencée
  - vert dès que sa visite commence et tant le traitement n'est pas terminé

Analyse

- La difficulté de l'exploration consiste à éviter de visiter plusieurs fois un même sommet. Pour cela on met en oeuvre un marquage des sommets par des couleurs.
- Lors d'une exploration, chaque sommet passe par trois couleurs :
  - bleu tant que la visite du sommet n'a pas commencée
  - vert dès que sa visite commence et tant le traitement n'est pas terminé
  - rouge dès que le traitement est terminé

Analyse

- La difficulté de l'exploration consiste à éviter de visiter plusieurs fois un même sommet. Pour cela on met en oeuvre un marquage des sommets par des couleurs.
- Lors d'une exploration, chaque sommet passe par trois couleurs :
  - bleu tant que la visite du sommet n'a pas commencée
  - vert dès que sa visite commence et tant le traitement n'est pas terminé
  - rouge dès que le traitement est terminé
- L'exploration à partir d'un sommet s ne permet pas nécessairement d'explorer tout le graphe (il peut y avoir plusieurs CC/CFC). Pour effectuer une exploration complète il faut relancer le parcours à partir d'un sommet bleu tant qu'il en existe.

Parcours à partir d'un sommet

On gère une structure **S** (pile, file, ou autre). On dispose d'une fonction d'ajout (dans) et de retrait (de) cette structure. Depuis un sommet donné on peut sélectionner un *successeur* (par exemple un voisin).
Le parcours débute par un sommet s_0.

```
1  /*parcourir les sommets bleus accessibles depuis s0*/
2  Colorer en bleu tous les sommets.
3  Créer une structure S vide, y ajouter s0, colorer s0 en vert
4  tant_que S n'est pas vide faire
5    retirer un sommet s de S
6    (traiter s et le colorer en Rouge) ou bien le rajouter à S
7    si s a des successeurs Bleus
8        en choisir un ou même plusieurs;
9        le/les colorer en Vert; le/les ajouter à S;
10   sinon
11     si s∈S, le retirer définitivement, traiter + colorer s en Roug
```

Dès qu'un sommet bleu est abordé, il devient vert. Suivant les traitements, on peut choisir de traiter s à plusieurs endroits (L6 ou L11).

Graphe de liaison induit

- Soit $G = (V, E)$ un graphe et $s_0 \in V$. On appelle *graphe de liaison induit* par l'exploration de G à partir de s_0, le sous-graphe de G engendré par les arêtes $\{u, v\} \in E$ (resp. les arcs) par lesquelles passent l'exploration de G, (l'exploration passe par $\{u, v\}$ (resp. (u, v)) si celle-ci provoque le coloriage du sommet v en vert).

Graphe de liaison induit

- Soit $G = (V, E)$ un graphe et $s_0 \in V$. On appelle *graphe de liaison induit* par l'exploration de G à partir de s_0, le sous-graphe de G engendré par les arêtes $\{u, v\} \in E$ (resp. les arcs) par lesquelles passent l'exploration de G, (l'exploration passe par $\{u, v\}$ (resp. (u, v)) si celle-ci provoque le coloriage du sommet v en vert).
- Pour un parcours depuis s_0 :

Graphe de liaison induit

- Soit $G = (V, E)$ un graphe et $s_0 \in V$. On appelle *graphe de liaison induit* par l'exploration de G à partir de s_0, le sous-graphe de G engendré par les arêtes $\{u, v\} \in E$ (resp. les arcs) par lesquelles passent l'exploration de G, (l'exploration passe par $\{u, v\}$ (resp. (u, v)) si celle-ci provoque le coloriage du sommet v en vert).
- Pour un parcours depuis s_0 :
  - on débute avec le graphe $(\{s_0\}, \emptyset)$

Graphe de liaison induit

- Soit $G = (V, E)$ un graphe et $s_0 \in V$. On appelle *graphe de liaison induit* par l'exploration de G à partir de s_0, le sous-graphe de G engendré par les arêtes $\{u, v\} \in E$ (resp. les arcs) par lesquelles passent l'exploration de G, (l'exploration passe par $\{u, v\}$ (resp. (u, v)) si celle-ci provoque le coloriage du sommet v en vert).
- Pour un parcours depuis s_0 :
  - on débute avec le graphe $(\{s_0\}, \emptyset)$
  - lors du passage du parcours par un sommet s vert on ajoute chaque voisin bleu t et l'arête (resp. arc) $\{s, t\}$ (resp. (s, t)) au graphe induit (mais peut-être pas tous en même temps).

Graphe de liaison induit

- Soit $G = (V, E)$ un graphe et $s_0 \in V$. On appelle *graphe de liaison induit* par l'exploration de G à partir de s_0, le sous-graphe de G engendré par les arêtes $\{u, v\} \in E$ (resp. les arcs) par lesquelles passent l'exploration de G, (l'exploration passe par $\{u, v\}$ (resp. (u, v)) si celle-ci provoque le coloriage du sommet v en vert).
- Pour un parcours depuis s_0 :
  - on débute avec le graphe $(\{s_0\}, \emptyset)$
  - lors du passage du parcours par un sommet s vert on ajoute chaque voisin bleu t et l'arête (resp. arc) $\{s, t\}$ (resp. (s, t)) au graphe induit (mais peut-être pas tous en même temps).
  - On construit ainsi un graphe connexe ayant k sommets et $k - 1$ arêtes, autrement dit un arbre ou une arborescence.

Graphe de liaison induit

- Soit $G = (V, E)$ un graphe et $s_0 \in V$. On appelle *graphe de liaison induit* par l'exploration de G à partir de s_0, le sous-graphe de G engendré par les arêtes $\{u, v\} \in E$ (resp. les arcs) par lesquelles passent l'exploration de G, (l'exploration passe par $\{u, v\}$ (resp. (u, v)) si celle-ci provoque le coloriage du sommet v en vert).
- Pour un parcours depuis s_0 :
  - on débute avec le graphe $(\{s_0\}, \emptyset)$
  - lors du passage du parcours par un sommet s vert on ajoute chaque voisin bleu t et l'arête (resp. arc) $\{s, t\}$ (resp. (s, t)) au graphe induit (mais peut-être pas tous en même temps).
  - On construit ainsi un graphe connexe ayant k sommets et $k - 1$ arêtes, autrement dit un arbre ou une arborescence.
- Le graphe de liaison induit par une exploration complète de G est un ensemble d'arbre ou d'arborescence.

Tableau de couleurs

- On colorie tous les sommets en bleu ($O(n)$) puis on lance l'exploration de n'importe quel sommet.

Tableau de couleurs

- On colorie tous les sommets en bleu ($O(n)$) puis on lance l'exploration de n'importe quel sommet.
- Lors d'un parcours, chaque sommet entre au plus une fois dans l'accumulateur `Verts`, et n'en sort qu'au plus une fois (quand il devient rouge).

Tableau de couleurs

- On colorie tous les sommets en bleu ($O(n)$) puis on lance l'exploration de n'importe quel sommet.
- Lors d'un parcours, chaque sommet entre au plus une fois dans l'accumulateur `Verts`, et n'en sort qu'au plus une fois (quand il devient rouge).
- *Ces opérations d'entrée et de sortie dans/de l'accumulateur devraient être de coût constant*. Pour réaliser cette condition, la solution que nous adoptons consiste à utiliser un tableau de couleurs R,V,B.

Algorithme

- L'ensemble des sommets Verts est représenté par une file (bibliothèque OCAML **queue** par exemple)

Algorithme

- L'ensemble des sommets Verts est représenté par une file (bibliothèque OCAML **queue** par exemple)
- Principe : on explore le graphe à partir d'un sommet en visitant d'abord tous les sommets voisins (à une distance 1), puis tous les sommets voisins de ses voisins (à une distance 2)....

Algorithme

F : file des sommets verts.

```
1  procedure Largeur(G:graphe, F:file)
2    tant_que F non vide faire
3      Defiler x
4      pour chaque voisin y de x :
5        si y est bleu alors
6          Enfiler y et le colorier en vert
7      Colorier x en rouge
8
9  procedure Largeur_totale (G:graphe,F:file)
10   Pour chaque sommet s :
11     si s est bleu alors
12       Colorier s en vert et Enfiler s
13       Largeur(G,F)
14
15 Colorier tous les  sommets en bleu
16 Créer file_fifo vide F /*file des sommets verts*/
17 Largeur_totale(G,F)
```

Variant de la boucle `tant que` : nombre de sommets bleus + nombre de sommets verts. L'algorithme termine.

Coût des opérations de file

Pour un graphe $G = (V, E)$ avec $|E| = p$ et $|V| = n$

- Tous les sommets sont coloriés en bleu exactement une fois au début puis plus jamais : $\Theta(n)$.

Coût des opérations de file

Pour un graphe $G = (V, E)$ avec $|E| = p$ et $|V| = n$

- Tous les sommets sont coloriés en bleu exactement une fois au début puis plus jamais : $\Theta(n)$.
- Un sommet finit toujours par entrer dans la file (soit parce qu'il est repéré comme bleu dans `Largeur_totale` soit parce qu'il est voisin bleu du sommet sortant de file dans `Largeur`) .
  Du fait des tests de couleurs, il n'y entre qu'une fois.

Coût des opérations de file

Pour un graphe $G = (V, E)$ avec $|E| = p$ et $|V| = n$

- Tous les sommets sont coloriés en bleu exactement une fois au début puis plus jamais : $\Theta(n)$.
- Un sommet finit toujours par entrer dans la file (soit parce qu'il est repéré comme bleu dans `Largeur_totale` soit parce qu'il est voisin bleu du sommet sortant de file dans `Largeur`) .
  Du fait des tests de couleurs, il n'y entre qu'une fois.
- Un sommet finit toujours par quitter la file car l'algorithme termine.

Coût des opérations de file

Pour un graphe $G = (V, E)$ avec $|E| = p$ et $|V| = n$

- Tous les sommets sont coloriés en bleu exactement une fois au début puis plus jamais : $\Theta(n)$.
- Un sommet finit toujours par entrer dans la file (soit parce qu'il est repéré comme bleu dans `Largeur_totale` soit parce qu'il est voisin bleu du sommet sortant de file dans `Largeur`) .
  Du fait des tests de couleurs, il n'y entre qu'une fois.
- Un sommet finit toujours par quitter la file car l'algorithme termine.
- Les opérations d'enfilement/défilement sont en $O(1)$.
  Le coût total de gestion de file est donc en $\Theta(n)$.

Gestion des listes d'adjacence

Pour un graphe $G = (V, E)$ avec $|E| = p$ et $|V| = n$

- Une liste d'adjacence donnée n'est balayée qu'une fois et une seule (puisque chaque sommet est ajouté dans la file puis défilé une fois et une seule). Chaque élément de cette liste donne lieu à des opérations de coloriage/enfilement en $O(1)$.

Gestion des listes d'adjacence

Pour un graphe $G = (V, E)$ avec $|E| = p$ et $|V| = n$

- Une liste d'adjacence donnée n'est balayée qu'une fois et une seule (puisque chaque sommet est ajouté dans la file puis défilé une fois et une seule). Chaque élément de cette liste donne lieu à des opérations de coloriage/enfilement en $O(1)$.
- La somme des longueurs des listes d'adjacence est égale à p. Donc le temps total consacré au balayage des listes d'adjacence est en $\Theta(p)$.

Complexité du parcours en largeur

Pour un graphe $G = (V, E)$ avec $|E| = p$ et $|V| = n$

- Les opérations de gestion de file coûtent $\Theta(n)$.

Complexité du parcours en largeur

Pour un graphe $G = (V, E)$ avec $|E| = p$ et $|V| = n$

- Les opérations de gestion de file coûtent $\Theta(n)$.
- Les opérations de gestion de listes d'adjacence coûtent $\Theta(p)$.

Complexité du parcours en largeur

Pour un graphe $G = (V, E)$ avec $|E| = p$ et $|V| = n$

- Les opérations de gestion de file coûtent $\Theta(n)$.
- Les opérations de gestion de listes d'adjacence coûtent $\Theta(p)$.
- Enfin la coloration initiale est en $\Theta(n)$.

Complexité du parcours en largeur

Pour un graphe $G = (V, E)$ avec $|E| = p$ et $|V| = n$

- Les opérations de gestion de file coûtent $\Theta(n)$.
- Les opérations de gestion de listes d'adjacence coûtent $\Theta(p)$.
- Enfin la coloration initiale est en $\Theta(n)$.
- Le total du coût de toutes les opérations du parcours en largeur est en $\Theta(n + p)$.

Propriétés du parcours en largeur d'abord

- Considérons un parcours en largeur depuis un sommet s :

Propriétés du parcours en largeur d'abord

- Considérons un parcours en largeur depuis un sommet s :
  - s est le premier sommet rouge. Un sommet devient rouge avant ses sucesseurs dans l'ordre de parcours.

Propriétés du parcours en largeur d'abord

- Considérons un parcours en largeur depuis un sommet s :
  - s est le premier sommet rouge. Un sommet devient rouge avant ses sucesseurs dans l'ordre de parcours.
  - Un sommet rouge n'a que des sommets adjacents verts ou rouges (en exo).

Propriétés du parcours en largeur d'abord

- Considérons un parcours en largeur depuis un sommet s :
  - s est le premier sommet rouge. Un sommet devient rouge avant ses sucesseurs dans l'ordre de parcours.
  - Un sommet rouge n'a que des sommets adjacents verts ou rouges (en exo).
  - Si un sommet x est rouge alors il existe une chaîne/chemin allant de s à x constituée uniquement de sommets rouges (en exo).

Propriétés du parcours en largeur d'abord

- Considérons un parcours en largeur depuis un sommet s :
  - s est le premier sommet rouge. Un sommet devient rouge avant ses sucesseurs dans l'ordre de parcours.
  - Un sommet rouge n'a que des sommets adjacents verts ou rouges (en exo).
  - Si un sommet x est rouge alors il existe une chaîne/chemin allant de s à x constituée uniquement de sommets rouges (en exo).
  - Si un sommet x est vert alors il existe une chaîne/chemin allant de s à x constituée uniquement de sommets verts ou rouges (en exo).

Propriétés du parcours en largeur d'abord

- Considérons un parcours en largeur depuis un sommet s :
  - s est le premier sommet rouge. Un sommet devient rouge avant ses sucesseurs dans l'ordre de parcours.
  - Un sommet rouge n'a que des sommets adjacents verts ou rouges (en exo).
  - Si un sommet x est rouge alors il existe une chaîne/chemin allant de s à x constituée uniquement de sommets rouges (en exo).
  - Si un sommet x est vert alors il existe une chaîne/chemin allant de s à x constituée uniquement de sommets verts ou rouges (en exo).
  - A la fin du parcours tous les sommets sont soit bleus, soit rouges (et la file des verts est vide).

Propriétés du parcours en largeur d'abord

- Considérons un parcours en largeur depuis un sommet s :
  - s est le premier sommet rouge. Un sommet devient rouge avant ses sucesseurs dans l'ordre de parcours.
  - Un sommet rouge n'a que des sommets adjacents verts ou rouges (en exo).
  - Si un sommet x est rouge alors il existe une chaîne/chemin allant de s à x constituée uniquement de sommets rouges (en exo).
  - Si un sommet x est vert alors il existe une chaîne/chemin allant de s à x constituée uniquement de sommets verts ou rouges (en exo).
  - A la fin du parcours tous les sommets sont soit bleus, soit rouges (et la file des verts est vide).
- Conséquence : à la fin de l'appel de `Largeur` les sommets rouges sont tous les sommets accessibles à partir de s.

Preuve : accessiblité = coloration en rouge

Posons $G = (V, E)$ et faisons un bfs depuis $s_0 \in V$. Invariant $\ll$ A la fin de chaque tour dans `Largeur`, il y a un chemin vert/rouge depuis s_0 vers tout sommet de la file, et il existe un chemin totalement rouge de s_0 vers tout sommet rouge $\gg$. Vérifié avant la boucle : OK.

- Au tour 1, s_0 sort de la file et devient rouge. Alors il y a un chemin rouge de s_0 à s_0. Et tous les voisins de s deviennent verts : donc il y a un chemin rouge/vert vers eux.

Preuve : accessiblité = coloration en rouge

Posons $G = (V, E)$ et faisons un bfs depuis $s_0 \in V$. Invariant $\ll$ A la fin de chaque tour dans `Largeur`, il y a un chemin vert/rouge depuis s_0 vers tout sommet de la file, et il existe un chemin totalement rouge de s_0 vers tout sommet rouge $\gg$. Vérifié avant la boucle : OK.

- Au tour 1, s_0 sort de la file et devient rouge. Alors il y a un chemin rouge de s_0 à s_0. Et tous les voisins de s deviennent verts : donc il y a un chemin rouge/vert vers eux.
- Supposons la propriété vraie au tour k. Soit s le sommet défilé au tour $k+1$. Il faut vérifier la propriété pour le nouveau sommet rouge et les nouveaux verts.

Preuve : accessiblité = coloration en rouge

Posons $G = (V, E)$ et faisons un bfs depuis $s_0 \in V$. Invariant $\ll$ A la fin de chaque tour dans `Largeur`, il y a un chemin vert/rouge depuis s_0 vers tout sommet de la file, et il existe un chemin totalement rouge de s_0 vers tout sommet rouge $\gg$. Vérifié avant la boucle : OK.

- Au tour 1, s_0 sort de la file et devient rouge. Alors il y a un chemin rouge de s_0 à s_0. Et tous les voisins de s deviennent verts : donc il y a un chemin rouge/vert vers eux.
- Supposons la propriété vraie au tour k. Soit s le sommet défilé au tour $k+1$. Il faut vérifier la propriété pour le nouveau sommet rouge et les nouveaux verts.
  - s devient rouge. Puisque s était dans la file, il y a été placé par un sommet x qui est devenu rouge. Par HR, il y a un chemin rouge de s_0 à x et donc (en ajoutant l'arc (x, s)) de s_0 à s.

Preuve : accessiblité = coloration en rouge

Posons $G = (V, E)$ et faisons un bfs depuis $s_0 \in V$. Invariant $\ll$ A la fin de chaque tour dans `Largeur`, il y a un chemin vert/rouge depuis s_0 vers tout sommet de la file, et il existe un chemin totalement rouge de s_0 vers tout sommet rouge $\gg$. Vérifié avant la boucle : OK.

- Au tour 1, s_0 sort de la file et devient rouge. Alors il y a un chemin rouge de s_0 à s_0. Et tous les voisins de s deviennent verts : donc il y a un chemin rouge/vert vers eux.
- Supposons la propriété vraie au tour k. Soit s le sommet défilé au tour $k+1$. Il faut vérifier la propriété pour le nouveau sommet rouge et les nouveaux verts.
  - s devient rouge. Puisque s était dans la file, il y a été placé par un sommet x qui est devenu rouge. Par HR, il y a un chemin rouge de s_0 à x et donc (en ajoutant l'arc (x, s)) de s_0 à s.
  - Tout sommet y qui devient vert est un voisin de s. Comme il y a un chemin rouge de s_0 à s, il y a un chemin rouge/vert de s_0 à y.

Preuve : accessiblité = coloration en rouge

Posons $G = (V, E)$ et faisons un bfs depuis $s_0 \in V$. Invariant « A la fin de chaque tour dans `Largeur`, il y a un chemin vert/rouge depuis s_0 vers tout sommet de la file, et il existe un chemin totalement rouge de s_0 vers tout sommet rouge ». Vérifié avant la boucle : OK.

- Au tour 1, s_0 sort de la file et devient rouge. Alors il y a un chemin rouge de s_0 à s_0. Et tous les voisins de s deviennent verts : donc il y a un chemin rouge/vert vers eux.
- Supposons la propriété vraie au tour k. Soit s le sommet défilé au tour $k+1$. Il faut vérifier la propriété pour le nouveau sommet rouge et les nouveaux verts.
  - s devient rouge. Puisque s était dans la file, il y a été placé par un sommet x qui est devenu rouge. Par HR, il y a un chemin rouge de s_0 à x et donc (en ajoutant l'arc (x, s)) de s_0 à s.
  - Tout sommet y qui devient vert est un voisin de s. Comme il y a un chemin rouge de s_0 à s, il y a un chemin rouge/vert de s_0 à y.
- Quand on sort de la boucle `tant_que`, si un sommet x est rouge, il y a un chemin (rouge) depuis s_0 vers x donc x est accessible depuis s_0.

Preuve : accessiblité = coloration en rouge

Posons $G = (V, E)$ et faisons un bfs depuis $s_0 \in V$.
On montre par récurrence la propriété $P(k)$=« si un sommet est à une distance $k \leq n$ de s_0, alors il est rouge à la fin du BFS ».

- Vrai pour la distance $k = 0$. s_0 est accessible depuis s et il est rouge. Cas de base OK.

Preuve : accessiblité = coloration en rouge

Posons $G = (V, E)$ et faisons un bfs depuis $s_0 \in V$.
On montre par récurrence la propriété $P(k)$=« si un sommet est à une distance $k \leq n$ de s_0, alors il est rouge à la fin du BFS ».

- Vrai pour la distance $k = 0$. s_0 est accessible depuis s et il est rouge. Cas de base OK.
- Si la propriété est vraie pour tout sommet accessible à la distance k de s_0, soit x à la distance $k + 1$ (s'il n'existe pas de sommet à la distance $k + 1$, il n'en existe pas non plus à une distance supérieure et donc $\forall q$, $P(q)$).

Preuve : accessiblité = coloration en rouge

Posons $G = (V, E)$ et faisons un bfs depuis $s_0 \in V$.
On montre par récurrence la propriété $P(k)$=« si un sommet est à une distance $k \leq n$ de s_0, alors il est rouge à la fin du BFS ».

- Vrai pour la distance $k = 0$. s_0 est accessible depuis s et il est rouge. Cas de base OK.
- Si la propriété est vraie pour tout sommet accessible à la distance k de s_0, soit x à la distance $k+1$ (s'il n'existe pas de sommet à la distance $k+1$, il n'en existe pas non plus à une distance supérieure et donc $\forall q$, $P(q)$).
- Alors le prédécesseur y de x dans un PCC de s_0 à x est à une distance $\leq k$ de s_0 (un sous-chemin de PCC est un PCC). Par HR, il devient rouge à un moment.

Preuve : accessiblité = coloration en rouge

Posons $G = (V, E)$ et faisons un bfs depuis $s_0 \in V$.
On montre par récurrence la propriété $P(k)$=« si un sommet est à une distance $k \leq n$ de s_0, alors il est rouge à la fin du BFS ».

- Vrai pour la distance $k = 0$. s_0 est accessible depuis s et il est rouge. Cas de base OK.
- Si la propriété est vraie pour tout sommet accessible à la distance k de s_0, soit x à la distance $k+1$ (s'il n'existe pas de sommet à la distance $k+1$, il n'en existe pas non plus à une distance supérieure et donc $\forall q$, $P(q)$).
- Alors le prédécesseur y de x dans un PCC de s_0 à x est à une distance $\leq k$ de s_0 (un sous-chemin de PCC est un PCC). Par HR, il devient rouge à un moment.
- Donc si x n'est pas marqué au moment où y devient rouge, alors y le marque en vert et x finit par devenir rouge.
  Et si x est déjà marqué quand y devient rouge, alors il devient rouge.
  (Tout sommet qui entre dans la file en sort et devient rouge).

Preuve : accessiblité = coloration en rouge

Posons $G = (V, E)$ et faisons un bfs depuis $s_0 \in V$.
On montre par récurrence la propriété $P(k)$=« si un sommet est à une distance $k \leq n$ de s_0, alors il est rouge à la fin du BFS ».

- Vrai pour la distance $k = 0$. s_0 est accessible depuis s et il est rouge. Cas de base OK.
- Si la propriété est vraie pour tout sommet accessible à la distance k de s_0, soit x à la distance $k+1$ (s'il n'existe pas de sommet à la distance $k+1$, il n'en existe pas non plus à une distance supérieure et donc $\forall q$, $P(q)$).
- Alors le prédécesseur y de x dans un PCC de s_0 à x est à une distance $\leq k$ de s_0 (un sous-chemin de PCC est un PCC). Par HR, il devient rouge à un moment.
- Donc si x n'est pas marqué au moment où y devient rouge, alors y le marque en vert et x finit par devenir rouge.
  Et si x est déjà marqué quand y devient rouge, alors il devient rouge.
  (Tout sommet qui entre dans la file en sort et devient rouge).

Preuve : accessiblité = coloration en rouge

Posons $G = (V, E)$ et faisons un bfs depuis $s_0 \in V$.
On montre par récurrence la propriété $P(k)$=« si un sommet est à une distance $k \leq n$ de s_0, alors il est rouge à la fin du BFS ».

- Vrai pour la distance $k = 0$. s_0 est accessible depuis s et il est rouge. Cas de base OK.
- Si la propriété est vraie pour tout sommet accessible à la distance k de s_0, soit x à la distance $k+1$ (s'il n'existe pas de sommet à la distance $k+1$, il n'en existe pas non plus à une distance supérieure et donc $\forall q$, $P(q)$).
- Alors le prédécesseur y de x dans un PCC de s_0 à x est à une distance $\leq k$ de s_0 (un sous-chemin de PCC est un PCC). Par HR, il devient rouge à un moment.
- Donc si x n'est pas marqué au moment où y devient rouge, alors y le marque en vert et x finit par devenir rouge.
  Et si x est déjà marqué quand y devient rouge, alors il devient rouge.
  (Tout sommet qui entre dans la file en sort et devient rouge). IZP

Voir cette animation

Présentation

- Principe : on explore le graphe à partir d'un sommet x en visitant l'un de ses sommets successeurs y et en poursuivant l'exploration d'abord par les successeurs de ce dernier avant les autres successeurs de x.

Présentation

- Principe : on explore le graphe à partir d'un sommet x en visitant l'un de ses sommets successeurs y et en poursuivant l'exploration d'abord par les successeurs de ce dernier avant les autres successeurs de x.
- Ainsi l'exploration s'effectue en suivant le plus loin possible une chaîne issue de x. Lorsque tous les successeurs d'un sommet ont été visités, on continu l'exploration en remontant dans la chaîne au premier sommet ayant encore des successeurs non visités.

Présentation

- Principe : on explore le graphe à partir d'un sommet x en visitant l'un de ses sommets successeurs y et en poursuivant l'exploration d'abord par les successeurs de ce dernier avant les autres successeurs de x.
- Ainsi l'exploration s'effectue en suivant le plus loin possible une chaîne issue de x. Lorsque tous les successeurs d'un sommet ont été visités, on continu l'exploration en remontant dans la chaîne au premier sommet ayant encore des successeurs non visités.
- On gère une pile des sommets verts (bibliothèque OCAML listes ou **stack**, **python** : listes ou classe **deque**)

Algorithme

On utilise une pile pour gérer les sommets verts.

```
1  procedure Profondeur(G : graphe, P : pile)
2    si P non vide alors
3       x := Peek P /*Récupère le sommet de la pile sans dépiler*/
4       tant_que il existe un voisin bleu y de x faire
5         Empiler ce voisin et le colorier en vert
6         Profondeur(G,P)/*explore les descendants de y*/
7       fin_faire
8       Depiler x/*x est dépilé après ses voisins !*/
9       Colorier x en rouge
10
11 Créer une pile P vide /*Pile des sommets verts*/
12 Colorier tous les sommets en bleu
13 pour tout sommet s de G faire
14     si s est bleu alors
15       colorier s en vert et le placer au sommet de P;
16       Profondeur(G,P);
17 fin_faire
```

En pratique

- Un même nœud s apparaît plusieurs fois au sommet de la pile. Il faut donc gérer un marqueur de progression dans sa liste de voisins pour éviter de reprendre cette liste depuis le début à chaque passage de s au sommet de la pile.

En pratique

- Un même nœud s apparaît plusieurs fois au sommet de la pile. Il faut donc gérer un marqueur de progression dans sa liste de voisins pour éviter de reprendre cette liste depuis le début à chaque passage de s au sommet de la pile.
- Une solution possible : considérer les listes de voisins comme des piles. On dépile jusqu'à trouver un sommet bleu. Les voisins dépilés ne reviennent jamais dans la pile de voisins.
  Cela impose de faire une copie du graphe ($O(n)$ si le graphe est un tableau de listes de voisins.)

Nombre d'opérations due à un sommet

- On analyse le nombre d'opérations engendrées par la présence d'un sommet donné en haut de la pile. Il suffira de sommer sur tous les sommets pour obtenir la complexité totale et ajouter aussi le coût d'initialisation en $O(n)$ et de copie en $O(n)$. Soit s un sommet.

Nombre d'opérations due à un sommet

- On analyse le nombre d'opérations engendrées par la présence d'un sommet donné en haut de la pile. Il suffira de sommer sur tous les sommets pour obtenir la complexité totale et ajouter aussi le coût d'initialisation en $O(n)$ et de copie en $O(n)$. Soit s un sommet.
  - Le sommet s entre toujours dans la pile (soit du fait de la boucle sur les sommets L14, soit comme voisin du top de pile). Le coloriage assure que le sommet ne revient pas dans la pile verte quand il l'a quittée.

Nombre d'opérations due à un sommet

- On analyse le nombre d'opérations engendrées par la présence d'un sommet donné en haut de la pile. Il suffira de sommer sur tous les sommets pour obtenir la complexité totale et ajouter aussi le coût d'initialisation en $O(n)$ et de copie en $O(n)$. Soit s un sommet.
  - Le sommet s entre toujours dans la pile (soit du fait de la boucle sur les sommets L14, soit comme voisin du top de pile). Le coloriage assure que le sommet ne revient pas dans la pile verte quand il l'a quittée.
  - Le sommet s apparaît au plus $\deg s^+ + 1$ fois au sommet de la pile (s'en convaincre avec le graphe $x \to y$).

Nombre d'opérations due à un sommet

- On analyse le nombre d'opérations engendrées par la présence d'un sommet donné en haut de la pile. Il suffira de sommer sur tous les sommets pour obtenir la complexité totale et ajouter aussi le coût d'initialisation en $O(n)$ et de copie en $O(n)$. Soit s un sommet.
  - Le sommet s entre toujours dans la pile (soit du fait de la boucle sur les sommets L14, soit comme voisin du top de pile). Le coloriage assure que le sommet ne revient pas dans la pile verte quand il l'a quittée.
  - Le sommet s apparaît au plus $\deg s^+ + 1$ fois au sommet de la pile (s'en convaincre avec le graphe $x \to y$).
  - A chaque apparition au sommet de la pile verte, il y a une recherche d'un voisin bleu (on peut la rendre AU TOTAL en $O(\deg^+ s)$ pour tout l'algo) ; un coloriage/empilement dans la pile verte parfois (au plus $\deg s^+$ fois).

Nombre d'opérations due à un sommet

- On analyse le nombre d'opérations engendrées par la présence d'un sommet donné en haut de la pile. Il suffira de sommer sur tous les sommets pour obtenir la complexité totale et ajouter aussi le coût d'initialisation en $O(n)$ et de copie en $O(n)$. Soit s un sommet.
  - Le sommet s entre toujours dans la pile (soit du fait de la boucle sur les sommets L14, soit comme voisin du top de pile). Le coloriage assure que le sommet ne revient pas dans la pile verte quand il l'a quittée.
  - Le sommet s apparaît au plus $\deg s^+ + 1$ fois au sommet de la pile (s'en convaincre avec le graphe $x \to y$).
  - A chaque apparition au sommet de la pile verte, il y a une recherche d'un voisin bleu (on peut la rendre AU TOTAL en $O(\deg^+ s)$ pour tout l'algo) ; un coloriage/empilement dans la pile verte parfois (au plus $\deg s^+$ fois).
  - s est dépilé puis colorié en rouge une seule fois.

Nombre d'opérations due à un sommet

- On analyse le nombre d'opérations engendrées par la présence d'un sommet donné en haut de la pile. Il suffira de sommer sur tous les sommets pour obtenir la complexité totale et ajouter aussi le coût d'initialisation en $O(n)$ et de copie en $O(n)$. Soit s un sommet.
  - Le sommet s entre toujours dans la pile (soit du fait de la boucle sur les sommets L14, soit comme voisin du top de pile). Le coloriage assure que le sommet ne revient pas dans la pile verte quand il l'a quittée.
  - Le sommet s apparaît au plus $\deg s^+ + 1$ fois au sommet de la pile (s'en convaincre avec le graphe $x \to y$).
  - A chaque apparition au sommet de la pile verte, il y a une recherche d'un voisin bleu (on peut la rendre AU TOTAL en $O(\deg^+ s)$ pour tout l'algo) ; un coloriage/empilement dans la pile verte parfois (au plus $\deg s^+$ fois).
  - s est dépilé puis colorié en rouge une seule fois.
- La présence de s en haut de la pile engendre donc un nombre d'opérations (majoré par un nombre) proportionnel à son nombre de présences au sommet, soit $1 + \deg s^+$.

Complexité totale

Pour un graphe $G = (V, E)$ avec $|E| = p$ et $|V| = n$

- On somme les nombres d'opérations occasionnées par chaque sommet pour obtenir la complexité totale.

Complexité totale

Pour un graphe $G = (V, E)$ avec $|E| = p$ et $|V| = n$

- On somme les nombres d'opérations occasionnées par chaque sommet pour obtenir la complexité totale.
- Le nombre total d'opération est (majoré par un nombre) proportionnel à

$$\sum_{s \in V}(1 + \deg^+ s) = n + \sum_{s \in V} \deg^+ s = n + p = O(n + p)$$

Même si on ajoute le coût d'initialisation en $O(n)$ et la copie en $O(n)$, l'ensemble reste en $O(n + p)$

Observations

Les invariants suivants sont maintenus

- A tout moment, la pile décrit un chemin entre s (la base) et le haut de la pile.

Observations

Les invariants suivants sont maintenus

- A tout moment, la pile décrit un chemin entre s (la base) et le haut de la pile.
- Lorsqu'on colorie un sommet x en vert, tous les sommets bleus accessibles à partir de x seront coloriés en rouges avant que x ne le soit.

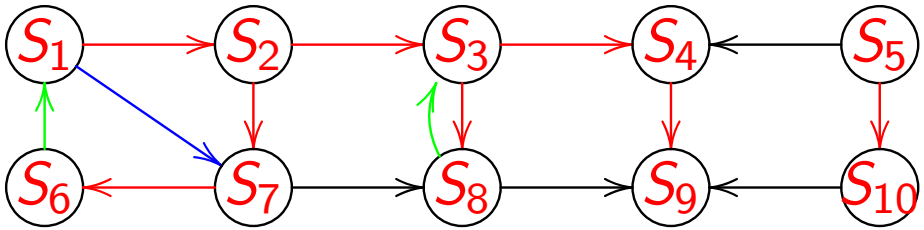
Observations

Les invariants suivants sont maintenus

- A tout moment, la pile décrit un chemin entre s (la base) et le haut de la pile.
- Lorsqu'on colorie un sommet x en vert, tous les sommets bleus accessibles à partir de x seront coloriés en rouges avant que x ne le soit.
- A la fin du parcours, l'ensemble des sommets rouges est l'ensemble des sommets accessibles à partir de s qui étaient bleus au moment l'entrée de s dans la pile.

Voir cette animation

Vocabulaire



- Soit $G_l = (V, L)$ le graphe de liaison induit par le parcours en profondeur d'un graphe G. Un arc $u \to v$ est :
  - un arc de liaison si et seulement si $u \to v \in L$
  - un arc retour si et seulement si u est un descendant de v dans L.
  - un arc avant si et seulement si v est un descendant de u dans L et $u \to v \notin L$ (on prend de l'avance par rapport au cheminement normal dans L)
  - un arc couvrant sinon (tous les autres arcs).

Variante

- Certains auteurs, gèrent le parcours en profondeur comme le parcours en largeur mais utilisent juste une pile et non une file.

Variante

- Certains auteurs, gèrent le parcours en profondeur comme le parcours en largeur mais utilisent juste une pile et non une file.
- Dans ce type de parcours, un même sommet n'apparaît qu'une seule fois au sommet de la pile verte.

Variante

- Certains auteurs, gèrent le parcours en profondeur comme le parcours en largeur mais utilisent juste une pile et non une file.
- Dans ce type de parcours, un même sommet n'apparaît qu'une seule fois au sommet de la pile verte.
- Dès qu'un sommet apparaît au sommet de la pile, il est dépilé (une fois pour toute) et on ajoute en une seule fois tous ses voisins bleus au sommet de la pile. Un sommet devient alors rouge avant ses successeurs.

Variante

- Certains auteurs, gèrent le parcours en profondeur comme le parcours en largeur mais utilisent juste une pile et non une file.
- Dans ce type de parcours, un même sommet n'apparaît qu'une seule fois au sommet de la pile verte.
- Dès qu'un sommet apparaît au sommet de la pile, il est dépilé (une fois pour toute) et on ajoute en une seule fois tous ses voisins bleus au sommet de la pile. Un sommet devient alors rouge avant ses successeurs.
- L'écriture du programme est alors plus simple, puisqu'une même liste de voisins n'est parcourue qu'une fois pour toute (alors qu'avec la version précédente ici , on la parcourt ≪ par morceaux ≫ en y revenant plusieurs fois).

Variante

- Certains auteurs, gèrent le parcours en profondeur comme le parcours en largeur mais utilisent juste une pile et non une file.
- Dans ce type de parcours, un même sommet n'apparaît qu'une seule fois au sommet de la pile verte.
- Dès qu'un sommet apparaît au sommet de la pile, il est dépilé (une fois pour toute) et on ajoute en une seule fois tous ses voisins bleus au sommet de la pile. Un sommet devient alors rouge avant ses successeurs.
- L'écriture du programme est alors plus simple, puisqu'une même liste de voisins n'est parcourue qu'une fois pour toute (alors qu'avec la version précédente ici , on la parcourt « par morceaux » en y revenant plusieurs fois).
- En revanche, on perd une propriété importante : la pile ne décrit plus exactement un chemin de la base au sommet mais est un simple accumulateur de sommets rencontrés.

Variante

```
1  Profondeur2(G:graphe, s:sommet)
2    Créer P : pile vide des sommets verts
3    Colorier s en vert et Empiler s
4    tant que P non vide faire
5      x := Depiler P /*x ne sera plus jamais au sommet*/
6      pour chaque sommet adjacent y de x :
7        /*tous les voisins de x ajoutés en une seule fois*/
8        si y est bleu alors
9          Colorier y en vert et Empiler y dans P
10     Colorier x en rouge /*x devient rouge avant tous ses voisins*/
```

A noter qu'il n'y a plus vraiment de raison d'utiliser trois couleurs ; deux suffisent.

Généralités

- Graphe *acyclique* : un graphe qui ne contient pas de circuit/cycle.

Généralités

- Graphe *acyclique* : un graphe qui ne contient pas de circuit/cycle.
- Certain problèmes n'ont de solution que pour des graphes acycliques : plus court chemin, ordonnancement...

Généralités

- Graphe *acyclique* : un graphe qui ne contient pas de circuit/cycle.
- Certain problèmes n'ont de solution que pour des graphes acycliques : plus court chemin, ordonnancement...
- Si un graphe est acyclique on peut concevoir des algorithmes qui s'arrangent pour traiter tous les prédecesseurs d'un sommet donné avant de traiter ce sommet (variante du parcours en profondeur).

Propriétés

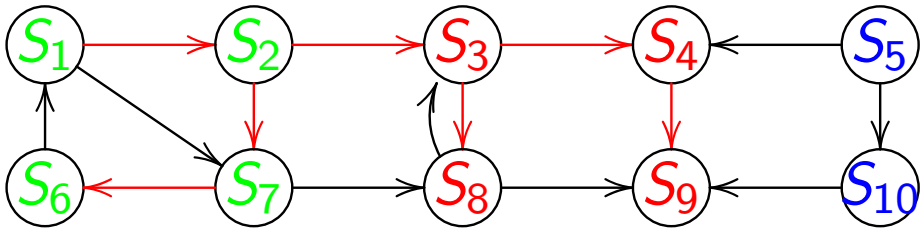
Cas des graphes orientés

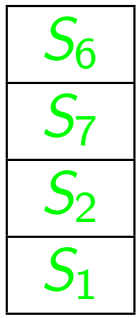
- **Propriété** : Un graphe contient un circuit si et seulement si lors du parcours en profondeur l'un des successeurs du sommet en haut de la pile verte est déjà vert.

Propriétés

Cas des graphes orientés

- **Propriété** : Un graphe contient un circuit si et seulement si lors du parcours en profondeur l'un des successeurs du sommet en haut de la pile verte est déjà vert.
- Exemple





S_6 a pour successeur S_1 qui est déjà vert $\Longrightarrow$ un circuit.

Propriétés

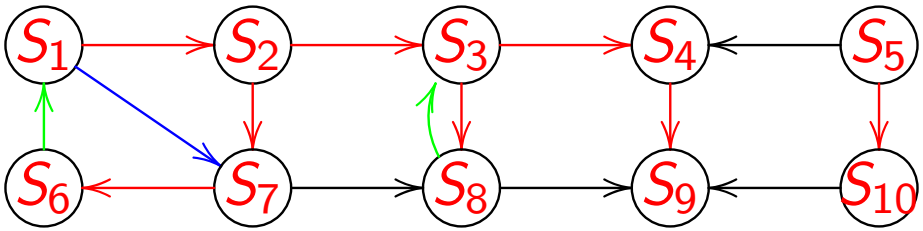
Cas des graphes orientés

- Autre façon de dire que le graphe est acyclique : le graphe de liaison induit par un parcours en profondeur d'un graphe sans circuit ne génère aucun arc retour.

Propriétés

Cas des graphes orientés

- Autre façon de dire que le graphe est acyclique : le graphe de liaison induit par un parcours en profondeur d'un graphe sans circuit ne génère aucun arc retour.
- Exemple



Il y a des arcs retour (en vert)
$\Longrightarrow$ des circuits

Propriétés

Cas des graphes orientés

L'algorithme pour la détection de circuit dans un graphe est une variante du parcours en profondeur : quand on examine les arcs issus du top de la pile, il suffit de regarder si un arc pointe vers un sommet vert. On s'arrête dès que c'est le cas.

Preuve de la méthode

Cas des graphes orientés

On montre que la présence d'un cycle est équivalente à l'existence d'un arc retour.

Preuve de la méthode

Cas des graphes orientés

On montre que la présence d'un cycle est équivalente à l'existence d'un arc retour.

S'il existe un arc retour

- Si la pile verte P a au moins 2 sommets, le dernier sommet vert a été ajouté parce qu'il existe un arc de $P[-2]$ à $P[-1]$ (notations `Python`).

Preuve de la méthode

Cas des graphes orientés

On montre que la présence d'un cycle est équivalente à l'existence d'un arc retour.

S'il existe un arc retour

- Si la pile verte P a au moins 2 sommets, le dernier sommet vert a été ajouté parce qu'il existe un arc de $P[-2]$ à $P[-1]$ (notations `Python`).
- Par récurrence, on obtient l'existence d'un chemin de tout sommet dans la pile vers les sommets supérieurs.

Preuve de la méthode

Cas des graphes orientés

On montre que la présence d'un cycle est équivalente à l'existence d'un arc retour.

S'il existe un arc retour

- Si la pile verte P a au moins 2 sommets, le dernier sommet vert a été ajouté parce qu'il existe un arc de $P[-2]$ à $P[-1]$ (notations `Python`).
- Par récurrence, on obtient l'existence d'un chemin de tout sommet dans la pile vers les sommets supérieurs.
- Donc si on empile un sommet, et qu'un de ses successeurs est déjà vert (ce qui est la définition d'un arc retour), il y a un cycle.

Preuve de la méthode

Cas des graphes orientés (Réciproque)

Supposons l'existence d'un cycle. On peut le considérer sans doublon (sinon enlever des sommets juqu'à ce qu'il ne contienne que des sommets distincts).
Soit x le premier sommet du cycle à être empilé. Tous les autres sommets du cycle sont bleus. Notons y le prédecesseur de x dans le cycle.

- Quand y est empilé, x est encore dans la pile puisque 1) y est accessible depuis x et 2) y était bleu quand x est entré dans la pile.

Preuve de la méthode

Cas des graphes orientés (Réciproque)

Supposons l'existence d'un cycle. On peut le considérer sans doublon (sinon enlever des sommets juqu'à ce qu'il ne contienne que des sommets distincts).
Soit x le premier sommet du cycle à être empilé. Tous les autres sommets du cycle sont bleus. Notons y le prédecesseur de x dans le cycle.

- Quand y est empilé, x est encore dans la pile puisque 1) y est accessible depuis x et 2) y était bleu quand x est entré dans la pile.
- Comme il y a un arc (y, x), cet arc est un arc retour. Dit autrement : il y a dans la pile au moment de l'empilement de y un chemin de x à y et un ultime arc qui va de y à x.

Présentation

- Exemple de problème : étant donné un ensemble de tâche à effectuer avec des contraintes d'antériorité, on veut construire une liste de ces tâches respectant les contraintes.

Présentation

- Exemple de problème : étant donné un ensemble de tâche à effectuer avec des contraintes d'antériorité, on veut construire une liste de ces tâches respectant les contraintes.
- Représentation : à l'aide d'un graphe orienté où chaque sommet représente une tâche et où chaque arc $x \to y$ signifie que la tâche x doit être effectuée avant la tâche y. On dit que x est un *prédecesseur* de y, y un *successeur* de x.

Présentation

- Exemple de problème : étant donné un ensemble de tâche à effectuer avec des contraintes d'antériorité, on veut construire une liste de ces tâches respectant les contraintes.
- Représentation : à l'aide d'un graphe orienté où chaque sommet représente une tâche et où chaque arc $x \to y$ signifie que la tâche x doit être effectuée avant la tâche y. On dit que x est un *prédecesseur* de y, y un *successeur* de x.
- La résolution de ce problème consiste à effectuer un *tri topologique* des sommets du graphe, c'est à dire à construire une liste ordonnée des sommets telle qu'aucun sommet du graphe n'apparaît dans la liste avant l'un de ses prédécesseurs.

Présentation

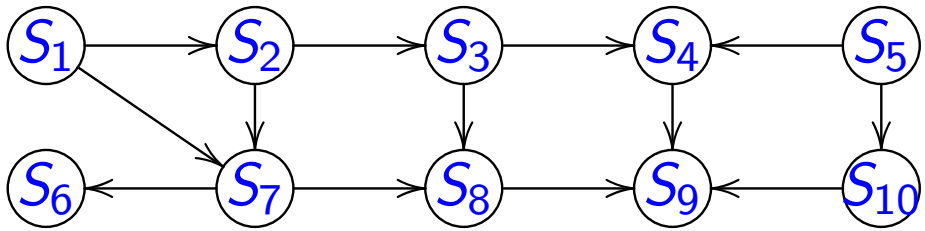
- Exemple de problème : étant donné un ensemble de tâche à effectuer avec des contraintes d'antériorité, on veut construire une liste de ces tâches respectant les contraintes.
- Représentation : à l'aide d'un graphe orienté où chaque sommet représente une tâche et où chaque arc $x \to y$ signifie que la tâche x doit être effectuée avant la tâche y. On dit que x est un *prédecesseur* de y, y un *successeur* de x.
- La résolution de ce problème consiste à effectuer un *tri topologique* des sommets du graphe, c'est à dire à construire une liste ordonnée des sommets telle qu'aucun sommet du graphe n'apparaît dans la liste avant l'un de ses prédécesseurs.
- On peut représenter les sommets alignés de gauche à droite sans qu'aucun arc n'aille de droite à gauche.

Définition

Définition

On appelle *tri topologique* d'un graphe orienté $G = (V, E)$ toute injection $r : V \to \mathbb{N}$ telle que $\forall x \to y \in E : r(x) < r(y)$. On dit que $r(x)$ est le *rang de* x.

- Exemple :

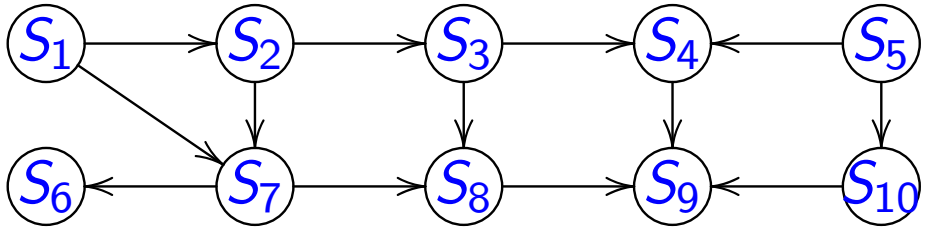


Définition

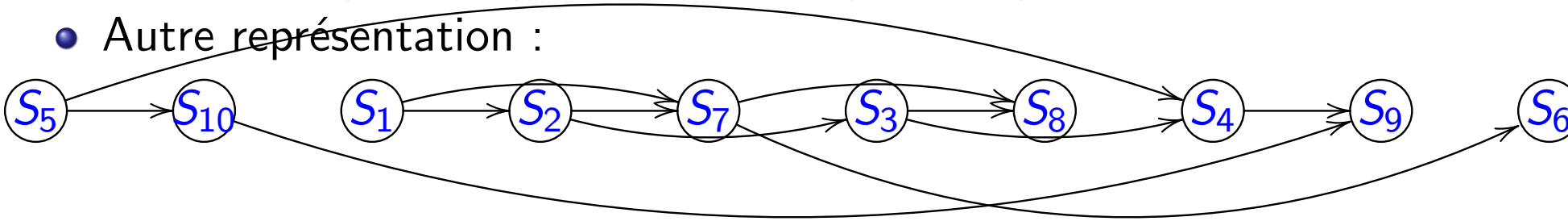
Définition

On appelle *tri topologique* d'un graphe orienté $G = (V, E)$ toute injection $r : V \to \mathbb{N}$ telle que $\forall x \to y \in E : r(x) < r(y)$. On dit que $r(x)$ est le *rang de* x.

- Exemple :



- Autre représentation :

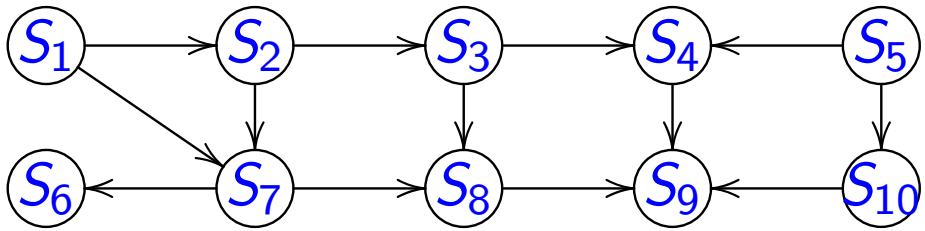


Définition

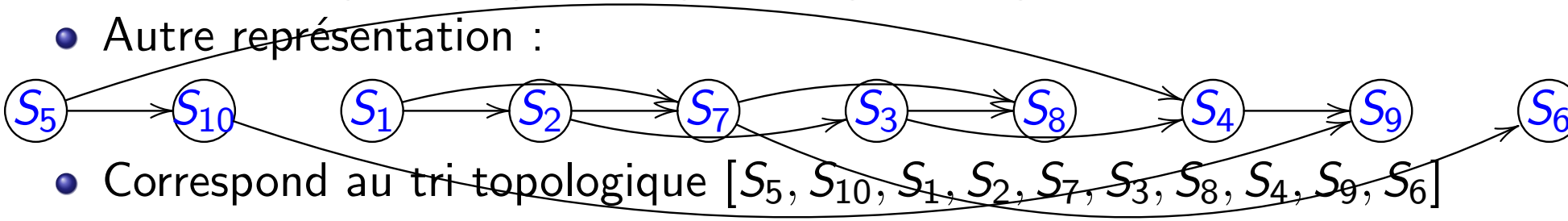
Définition

On appelle *tri topologique* d'un graphe orienté $G = (V, E)$ toute injection $r : V \to \mathbb{N}$ telle que $\forall x \to y \in E : r(x) < r(y)$. On dit que $r(x)$ est le *rang de* x.

- Exemple :



- Autre représentation :



- Correspond au tri topologique $[S_5, S_{10}, S_1, S_2, S_7, S_3, S_8, S_4, S_9, S_6]$

Tri topologique et acyclicité

Proposition

Un graphe G orienté est acyclique si et seulement si il existe un tri topologique de G.

Tri topologique et acyclicité

graphe acyclique $\Longrightarrow$ tri topologique

Pour trier topologiquement un graphe acyclique orienté contenant n sommets, on effectue un parcours en profondeur et on numérote de manière décroissante les sommets à partir de n au fur et à mesure qu'ils deviennent rouges : $r(s) = n$ si s est le premier rouge, $r(s) = 1$ si s est le dernier. On montre que la méthode est correcte.

- Supposons G acyclique. Si $r(x) < r(y)$, c'est que y devient rouge avant x. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un arc (y, x).

Tri topologique et acyclicité

graphe acyclique $\Longrightarrow$ tri topologique

Pour trier topologiquement un graphe acyclique orienté contenant n sommets, on effectue un parcours en profondeur et on numérote de manière décroissante les sommets à partir de n au fur et à mesure qu'ils deviennent rouges : $r(s) = n$ si s est le premier rouge, $r(s) = 1$ si s est le dernier. On montre que la méthode est correcte.

- Supposons G acyclique. Si $r(x) < r(y)$, c'est que y devient rouge avant x. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un arc (y, x).
- Au moment de l'empilement de y (donc quand y devient vert), si x est bleu, alors x est empilé après y donc devient rouge avant, ce qui contredit $r(x) < r(y)$.

Tri topologique et acyclicité

graphe acyclique $\Longrightarrow$ tri topologique

Pour trier topologiquement un graphe acyclique orienté contenant n sommets, on effectue un parcours en profondeur et on numérote de manière décroissante les sommets à partir de n au fur et à mesure qu'ils deviennent rouges : $r(s) = n$ si s est le premier rouge, $r(s) = 1$ si s est le dernier. On montre que la méthode est correcte.

- Supposons G acyclique. Si $r(x) < r(y)$, c'est que y devient rouge avant x. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un arc (y, x).
- Au moment de l'empilement de y (donc quand y devient vert), si x est bleu, alors x est empilé après y donc devient rouge avant, ce qui contredit $r(x) < r(y)$.
- Si au moment de l'empilement de y, x est déjà rouge, alors $r(x) > r(y)$, ce qui est absurde.

Tri topologique et acyclicité

graphe acyclique $\Longrightarrow$ tri topologique

Pour trier topologiquement un graphe acyclique orienté contenant n sommets, on effectue un parcours en profondeur et on numérote de manière décroissante les sommets à partir de n au fur et à mesure qu'ils deviennent rouges : $r(s) = n$ si s est le premier rouge, $r(s) = 1$ si s est le dernier. On montre que la méthode est correcte.

- Supposons G acyclique. Si $r(x) < r(y)$, c'est que y devient rouge avant x. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un arc (y, x).
- Au moment de l'empilement de y (donc quand y devient vert), si x est bleu, alors x est empilé après y donc devient rouge avant, ce qui contredit $r(x) < r(y)$.
- Si au moment de l'empilement de y, x est déjà rouge, alors $r(x) > r(y)$, ce qui est absurde.
- Donc au moment de l'empilement de y, x est vert. Et comme il y a un arc (y, x), cela révèle un circuit : absurde.

Tri topologique et acyclicité

tri topologique $\Longrightarrow$ Graphe acyclique

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté.
Rappel : un tri toplogique r est une numérotation injective des sommets telle que pour deux sommets x, y : $(r(x) < r(y) \implies y \to x \notin E)$.

- On suppose qu'existe un circuit élémentaire C et on prend x dans ce circuit tel que $r(x) = \min(\{r(y) \mid y \in C\})$.

Tri topologique et acyclicité

tri topologique $\Longrightarrow$ Graphe acyclique

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté.
Rappel : un tri toplogique r est une numérotation injective des sommets telle que pour deux sommets x, y : $(r(x) < r(y) \implies y \to x \notin E)$.

- On suppose qu'existe un circuit élémentaire C et on prend x dans ce circuit tel que $r(x) = \min(\{r(y) \mid y \in C\})$.
- Soit y le prédecesseur de x dans C. Comme $y \to x \in E$, on a $r(y) < r(x)$.

Tri topologique et acyclicité

tri topologique $\Longrightarrow$ Graphe acyclique

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté.
Rappel : un tri toplogique r est une numérotation injective des sommets telle que pour deux sommets x, y : $(r(x) < r(y) \implies y \to x \notin E)$.

- On suppose qu'existe un circuit élémentaire C et on prend x dans ce circuit tel que $r(x) = \min(\{r(y) \mid y \in C\})$.
- Soit y le prédecesseur de x dans C. Comme $y \to x \in E$, on a $r(y) < r(x)$.
- Contradiction avec $r(x) \leq r(y)$.

Observations

- Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté. On a vue qu'une composante fortement connexe de G contenant un sommet x est l'ensemble des sommets y tels que y est accessible à partir de x et x est accessible à partir de y.

Observations

- Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté. On a vue qu'une composante fortement connexe de G contenant un sommet x est l'ensemble des sommets y tels que y est accessible à partir de x et x est accessible à partir de y.
- Le parcours en profondeur d'un graphe à partir d'un sommet x ayant comme résultat l'ensemble des sommets accessibles à partir de x, on va utiliser ce parcours pour calculer la composante fortement connexe contenant x.

Principe

Définition

Le graphe transposé G^{-1} d'un graphe G s'obtient en inversant chacun de ses arcs.

- Soit G un graphe orienté et x un sommet.

Principe

Définition

Le graphe transposé G^{-1} d'un graphe G s'obtient en inversant chacun de ses arcs.

- Soit G un graphe orienté et x un sommet.
- Parcourir en profondeur G à partir du sommet x pour calculer l'ensemble A des sommets accessibles à partir de x.

Principe

Définition

Le graphe transposé G^{-1} d'un graphe G s'obtient en inversant chacun de ses arcs.

- Soit G un graphe orienté et x un sommet.
- Parcourir en profondeur G à partir du sommet x pour calculer l'ensemble A des sommets accessibles à partir de x.
- Parcourir en profondeur le graphe transposé G^{-1} à partir de x pour calculer l'ensemble B des sommets dans G à partir desquels x est accessible.

Principe

Définition

Le graphe transposé G^{-1} d'un graphe G s'obtient en inversant chacun de ses arcs.

- Soit G un graphe orienté et x un sommet.
- Parcourir en profondeur G à partir du sommet x pour calculer l'ensemble A des sommets accessibles à partir de x.
- Parcourir en profondeur le graphe transposé G^{-1} à partir de x pour calculer l'ensemble B des sommets dans G à partir desquels x est accessible.
- L'ensemble des sommets $A \cap B$ est la composante fortement connexe de x dans G.

Principe

Définition

Le graphe transposé G^{-1} d'un graphe G s'obtient en inversant chacun de ses arcs.

- Soit G un graphe orienté et x un sommet.
- Parcourir en profondeur G à partir du sommet x pour calculer l'ensemble A des sommets accessibles à partir de x.
- Parcourir en profondeur le graphe transposé G^{-1} à partir de x pour calculer l'ensemble B des sommets dans G à partir desquels x est accessible.
- L'ensemble des sommets $A \cap B$ est la composante fortement connexe de x dans G.
- L'intersection des CFC de x dans G et G^{-1} peut s'effectuer en $O((|A| + |B|) \ln(|A \cap B|))$ si on représente les ensembles par des ABR équilibrés.

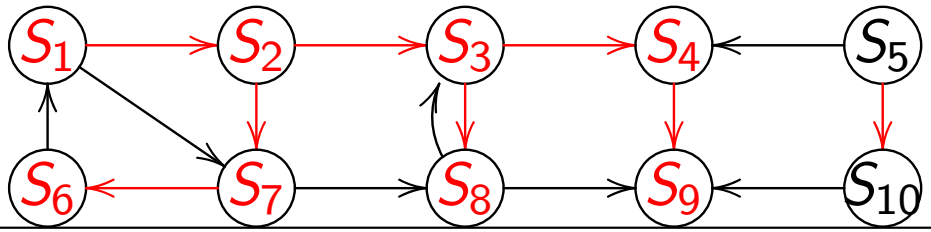
CFC en MPI

- On verra en MPI une meilleure méthode : l'*algorithme de Kosaraju-Sharir*.

CFC en MPI

- On verra en MPI une meilleure méthode : l'*algorithme de Kosaraju-Sharir*.
- Idée : Le graphe des CFC est orienté et acyclique et on le parcourt dans l'ordre inverse d'un de ses tris topologiques.

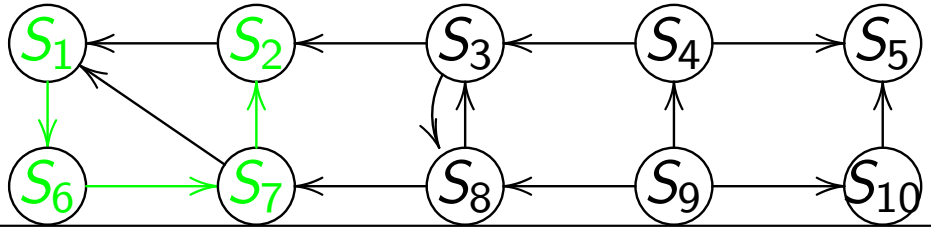
Exemple



Parcours en profondeur de G

A :

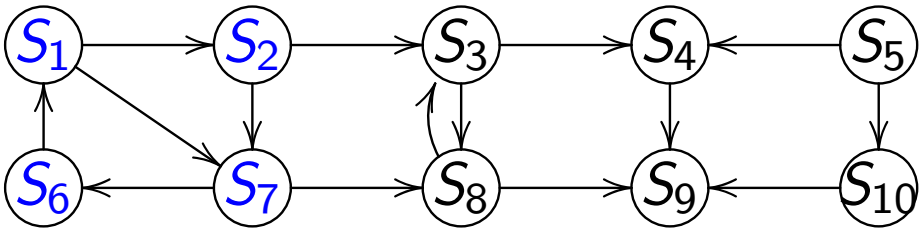
ensemble des sommets accessibles à partir de S_1.



Parcours en profondeur de G^{-1}

B :

ensemble des sommets à partir desquels S_1 est accessible.



$C = A \cap B$

composante fortement connexe de G contenant S_1.