Algorithme de Huffman

Lycée Thiers

Algorithme de Huffman

Lycée Thiers

1 Présentation

2 Analyse
- Correction
- Complexité

Crédits

- Wikipedia
- Informatique -Cours et exercices corrigés- (MP2I-MPI) (ellipse)
- Sujet Mines 2006 ; sujet info tronc commun Mines 2015.

Compression

- *Compression de donnée* : procédé qui consiste à réduire l'espace occupé par une information.

Compression

- *Compression de donnée* : procédé qui consiste à réduire l'espace occupé par une information.
- La compression peut être *sans perte* si à partir de l'information compressée on retrouve exactement l'information initiale.
  Dans le cas contraire (avec perte), l'information reconstruite doit être « proche » (dans un sens à définir) de l'information initiale.

Compression

- *Compression de donnée* : procédé qui consiste à réduire l'espace occupé par une information.
- La compression peut être *sans perte* si à partir de l'information compressée on retrouve exactement l'information initiale.
  Dans le cas contraire (avec perte), l'information reconstruite doit être ≪ proche ≫ (dans un sens à définir) de l'information initiale.
- Le texte à compresser est une suite de N caractères ; le résultat de la compression est une suite de bits. On fait l'hypothèse que chaque caractère s'écrit sur 1 octet (code ASCII). Ce n'est pas le cas pour un encodage UTF-16.

Taux de compression

- Le résultat de la compression des N caractères est une suite de C bits.

Taux de compression

- Le résultat de la compression des N caractères est une suite de C bits.
- En pratique, il faut regrouper ces bits par paquets de huit pour former des octets (taille du byte en C), avec éventuellement quelques bits de remplissage pour le dernier octet. Le résultat est écrit dans un fichier.

Taux de compression

- Le résultat de la compression des N caractères est une suite de C bits.
- En pratique, il faut regrouper ces bits par paquets de huit pour former des octets (taille du byte en C), avec éventuellement quelques bits de remplissage pour le dernier octet. Le résultat est écrit dans un fichier.
- Le *taux de compression* est le rapport $\tau = \frac{N}{\frac{C}{8}} = \frac{8N}{C}$. L'*économie d'espace* est la différence $E = 1 - \frac{8N}{C}$.

Taux de compression

- Le résultat de la compression des N caractères est une suite de C bits.
- En pratique, il faut regrouper ces bits par paquets de huit pour former des octets (taille du byte en C), avec éventuellement quelques bits de remplissage pour le dernier octet. Le résultat est écrit dans un fichier.
- Le *taux de compression* est le rapport $\tau = \frac{N}{\frac{C}{8}} = \frac{8N}{C}$. L'*économie d'espace* est la différence $E = 1 - \frac{8N}{C}$.
- Pour éviter la manipulation bit-à-bit, on triche un peu dans les codes proposés : on considère des chaînes de caractères **'0'** et **'1'**. Le code obtenu est alors 8 fois plus long qu'une séquence de bits.

1 Présentation

2 Analyse
- Correction
- Complexité

Présentation

- Le *codage de Huffman* est un algorithme de compression de données sans perte (on peut compresser puis décompresser et retrouver les valeurs initiales).

Présentation

- Le *codage de Huffman* est un algorithme de compression de données sans perte (on peut compresser puis décompresser et retrouver les valeurs initiales).
- Il utilise un *code à longueur variable* pour représenter un symbole de la source (par exemple un caractère dans un fichier).

Présentation

- Le *codage de Huffman* est un algorithme de compression de données sans perte (on peut compresser puis décompresser et retrouver les valeurs initiales).
- Il utilise un *code à longueur variable* pour représenter un symbole de la source (par exemple un caractère dans un fichier).
- Le code est déterminé à partir d'une estimation des fréquences d'apparition des symboles de source, un code court étant associé aux symboles de source les plus fréquents.

Présentation

- Le *codage de Huffman* est un algorithme de compression de données sans perte (on peut compresser puis décompresser et retrouver les valeurs initiales).
- Il utilise un *code à longueur variable* pour représenter un symbole de la source (par exemple un caractère dans un fichier).
- Le code est déterminé à partir d'une estimation des fréquences d'apparition des symboles de source, un code court étant associé aux symboles de source les plus fréquents.
- L'algorithme débute par une analyse fréquentielle des caractères d'un texte. Cet aspect n'est pas traité ici : nous supposons que cette analyse à déjà été effectuée

Présentation

- Le *codage de Huffman* est un algorithme de compression de données sans perte (on peut compresser puis décompresser et retrouver les valeurs initiales).
- Il utilise un *code à longueur variable* pour représenter un symbole de la source (par exemple un caractère dans un fichier).
- Le code est déterminé à partir d'une estimation des fréquences d'apparition des symboles de source, un code court étant associé aux symboles de source les plus fréquents.
- L'algorithme débute par une analyse fréquentielle des caractères d'un texte. Cet aspect n'est pas traité ici : nous supposons que cette analyse à déjà été effectuée
- Un code de Huffman est optimal au sens de la plus courte longueur pour un codage par symbole, et une distribution de probabilité (une fréquence) connue.

Exemple

- Avec « satisfaisant », les caractères **'a'** et **'s'** apparaissent 3 fois, et **'f','n'** 1 fois et **'i','t'** 2 fois.

Exemple

- Avec « satisfaisant », les caractères **'a'** et **'s'** apparaissent 3 fois, et **'f','n'** 1 fois et **'i','t'** 2 fois.
- On peut par exemple les coder sous la forme **'a'**(01) ; **'s'**(10) ; **'f'**(000) ;**'n'**(001) ;**'i'**(110) ;**'t'**(111).
  On obtient alors le codage suivant :

$$10\,01\,111\,110\,10\,000\,01\,110\,10\,01\,001\,111$$

Exemple

- Avec « satisfaisant », les caractères **'a'** et **'s'** apparaissent 3 fois, et **'f','n'** 1 fois et **'i','t'** 2 fois.
- On peut par exemple les coder sous la forme **'a'**(01) ; **'s'**(10) ; **'f'**(000) ;**'n'**(001) ;**'i'**(110) ;**'t'**(111).
  On obtient alors le codage suivant :

$$10\,01\,111\,110\,10\,000\,01\,110\,10\,01\,001\,111$$

- Pour le décodage, on remarque qu'aucun code n'est préfixe de l'autre. Cette propriété est voulue : elle permet un décodage sans ambiguïté de 100111110100000111010010011111.
  On lit les bits de la chaîne encodée jusqu'à reconnaître un code. Ce code n'étant préfixe d'aucun autre, on écrit la lettre correspondante et on poursuit la lecture.

Exemple

- Avec « satisfaisant », les caractères **'a'** et **'s'** apparaissent 3 fois, et **'f','n'** 1 fois et **'i','t'** 2 fois.
- On peut par exemple les coder sous la forme **'a'**(01) ; **'s'**(10) ; **'f'**(000) ;**'n'**(001) ;**'i'**(110) ;**'t'**(111).
  On obtient alors le codage suivant :

  $$10\,01\,111\,110\,10\,000\,01\,110\,10\,01\,001\,111$$

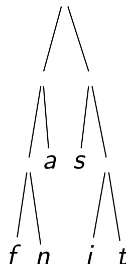
- Pour le décodage, on remarque qu'aucun code n'est préfixe de l'autre. Cette propriété est voulue : elle permet un décodage sans ambiguïté de 1001111110100000111010010011111.
  On lit les bits de la chaîne encodée jusqu'à reconnaître un code. Ce code n'étant préfixe d'aucun autre, on écrit la lettre correspondante et on poursuit la lecture.
- Un code qui possède la propriété qu'aucun mot n'est préfixe d'un autre est appelé *code préfixe*.

Arbre de Huffman

- Les encodages **'a'**(01) ; **'s'**(10) ; **'f'**(000) ;**'n'**(001) ;**'i'**(110) ;**'t'**(111) peuvent être représentés par des chemins dans un arbre dont les feuilles sont les lettres du texte à compresser.

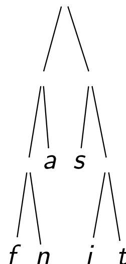
Arbre de Huffman

- Les encodages '**a**'(01) ; '**s**'(10) ; '**f**'(000) ;'**n**'(001) ;'**i**'(110) ;'**t**'(111) peuvent être représentés par des chemins dans un arbre dont les feuilles sont les lettres du texte à compresser.
- Chaque caractère est associé au chemin qui l'atteint depuis la racine : 0 désigne une descente à gauche et 1, à droite.



Arbre de Huffman

- Les encodages **'a'**(01) ; **'s'**(10) ; **'f'**(000) ;**'n'**(001) ;**'i'**(110) ;**'t'**(111) peuvent être représentés par des chemins dans un arbre dont les feuilles sont les lettres du texte à compresser.
- Chaque caractère est associé au chemin qui l'atteint depuis la racine : 0 désigne une descente à gauche et 1, à droite.



- Exemple : code de **'n'** = 001 (2 virages à gauche, 1 à droite). Chaque lettre du texte n'apparaît qu'une fois dans l'arbre (même si **'a'** est présent 3 fois dans le texte).

Arbre de Huffman

- Un *Arbre de Huffman* est un arbre binaire entier étiqueté par des tuples (caractère, fréquence).

Arbre de Huffman

- Un *Arbre de Huffman* est un arbre binaire entier étiqueté par des tuples (caractère, fréquence).
- Les nœuds internes ont pour étiquette ('\0',$f_g + f_d$) où f_g représente la fréquence du fils gauche et f_d celle du fils droit.

Arbre de Huffman

- Un *Arbre de Huffman* est un arbre binaire entier étiqueté par des tuples (caractère, fréquence).
- Les nœuds internes ont pour étiquette ('\0',$f_g + f_d$) où f_g représente la fréquence du fils gauche et f_d celle du fils droit.
- Remarques :

Arbre de Huffman

- Un *Arbre de Huffman* est un arbre binaire entier étiqueté par des tuples (caractère, fréquence).
- Les nœuds internes ont pour étiquette ('\0',$f_g + f_d$) où f_g représente la fréquence du fils gauche et f_d celle du fils droit.
- Remarques :
  - La *fréquence* d'un arbre est le second membre de l'étiquette de sa racine. Le *caractère* d'un arbre est le premier membre de l'étiquette de sa racine.

Arbre de Huffman

- Un *Arbre de Huffman* est un arbre binaire entier étiqueté par des tuples (caractère, fréquence).
- Les nœuds internes ont pour étiquette ('\0',$f_g + f_d$) où f_g représente la fréquence du fils gauche et f_d celle du fils droit.
- Remarques :
  - La *fréquence* d'un arbre est le second membre de l'étiquette de sa racine. Le *caractère* d'un arbre est le premier membre de l'étiquette de sa racine.
  - Les caractères des nœuds internes n'ont pas de signification particulière (on choisit donc '\0' par pure convention).

Arbre de Huffman

- Un *Arbre de Huffman* est un arbre binaire entier étiqueté par des tuples (caractère, fréquence).
- Les nœuds internes ont pour étiquette ('\0',$f_g + f_d$) où f_g représente la fréquence du fils gauche et f_d celle du fils droit.
- Remarques :
  - La *fréquence* d'un arbre est le second membre de l'étiquette de sa racine. Le *caractère* d'un arbre est le premier membre de l'étiquette de sa racine.
  - Les caractères des nœuds internes n'ont pas de signification particulière (on choisit donc '\0' par pure convention).
  - Les caractères des feuilles sont exactement les caractères différents du texte.

Arbre de Huffman

- Un *Arbre de Huffman* est un arbre binaire entier étiqueté par des tuples (caractère, fréquence).
- Les nœuds internes ont pour étiquette ('\0',$f_g + f_d$) où f_g représente la fréquence du fils gauche et f_d celle du fils droit.
- Remarques :
  - La *fréquence* d'un arbre est le second membre de l'étiquette de sa racine. Le *caractère* d'un arbre est le premier membre de l'étiquette de sa racine.
  - Les caractères des nœuds internes n'ont pas de signification particulière (on choisit donc '\0' par pure convention).
  - Les caractères des feuilles sont exactement les caractères différents du texte.
  - Pour des raisons de place, on ne représente pas le caractère des nœuds internes dans les représentations graphiques qui suivent.

fréquence et effectif

- La fréquence d'un caractère est proportionnelle à l'effectif de ce même caractère dans le texte ($N \times f_c = n_c$).
- Pour des raisons de place, plutôt que de manipuler des fréquences (représentées par des **float**), on préfère utiliser des effectifs (qui sont entiers).

Assemblage

- L'*assemblage* de deux arbres $A = (G_A, (c_A, f_A), D_A)$ et $B = (G_B, (c_B, f_B), D_B)$ est l'arbre

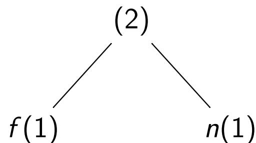
$$(A, (\backslash 0, f_A + f_B), B)$$

Assemblage

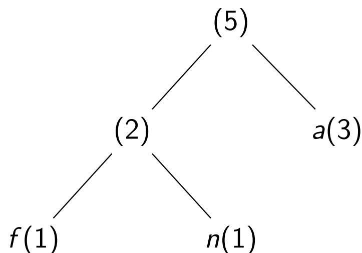
- L'*assemblage* de deux arbres $A = (G_A, (c_A, f_A), D_A)$ et $B = (G_B, (c_B, f_B), D_B)$ est l'arbre

$$(A, (\backslash 0, f_A + f_B), B)$$

- L'assemblage de



et $a(3)$ est



Algorithme

Construction de l'arbre

Listing 1 – Construction de l'arbre de Huffman

```
1  fonction huffman_tree (T : texte)
2     recuperer le tableau des frequences des caracteres de T
3     F := foret vide /* foret des arbres de Huffman*/
4     pour chaque caractere x de T
5       ajouter l'arbre feuille (x, frequence de x) a F
6     tant que F a au moins deux arbres
7        enlever les 2 arbres de plus petites frequences de F
8        assembler ces 2 arbres
9        ajouter cet assemblage a F
10       /*F a un arbre de moins qu'au tour d'avant*/
11    renvoyer l'unique element de F
```

Algorithme

Construction de l'arbre

Listing 2 – Construction de l'arbre de Huffman

```
1  fonction huffman_tree (T : texte)
2     recuperer le tableau des frequences des caracteres de T
3     F := foret vide /* foret des arbres de Huffman*/
4     pour chaque caractere x de T
5       ajouter l'arbre feuille (x, frequence de x) a F
6     tant que F a au moins deux arbres
7        enlever les 2 arbres de plus petites frequences de F
8        assembler ces 2 arbres
9        ajouter cet assemblage a F
10       /*F a un arbre de moins qu'au tour d'avant*/
11    renvoyer l'unique element de F
```

En pratique, la forêt est une file de priorité d'arbres de Huffman organisée selon la fréquence des racines (tas-min).

Algorithme

Encodage du texte

Listing 3 – Encodage du texte

```
1  fonction encoder (T:texte)
2     H := huffman(T)
3     dico := dictionnaire vide /* encodage des caracteres de T*/
4     pour chaque feuille f de H
5          path := chemin depuis la racine de H vers f
6          /* path sous forme de sequences de 0 (gauche)
7             et 1 (droite) */
8          ajouter a dico l'association (caractere de f, path)
9     sq := sequence de bits vide /* encodage du texte */
10    pour chaque caractere x de T
11         p := dico[x] /* encodage de x */
12         ajouter p a sq
13    renvoyer sq
```

Exemple

À partir du texte « satisfaisant » :

- Forêt d'arbres feuilles

$a(3)$ $s(3)$ $f(1)$ $n(1)$ $i(2)$ $t(2)$

- Assemblage de **f** et **n**

$a(3)$ $s(3)$ (2) $i(2)$ $t(2)$

$f(1)$ $n(1)$

- Assemblage de **i** et **t**

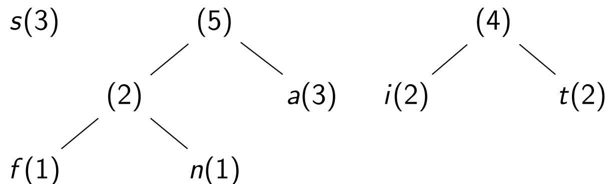
$a(3)$ $s(3)$ (2) (4)

$f(1)$ $n(1)$ $i(2)$ $t(2)$

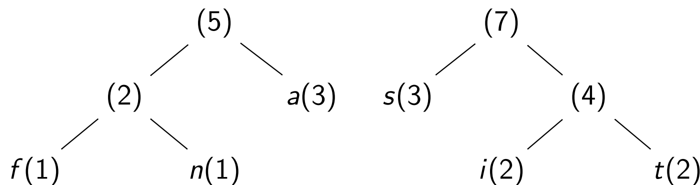
Exemple (suite)

À partir du texte « satisfaisant » :

- Assemblage d'arbres de fréquences 2 et 3



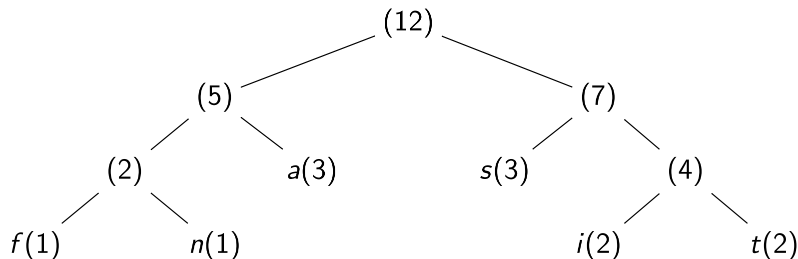
- Assemblage d'arbres de fréquences 4 et 3



Exemple (suite)

À partir du texte « satisfaisant » :

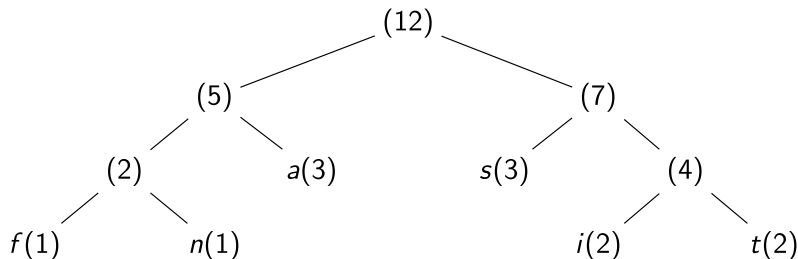
- Assemblage d'arbres de fréquences 5 et 7



Exemple (suite)

À partir du texte « satisfaisant » :

- Assemblage d'arbres de fréquences 5 et 7

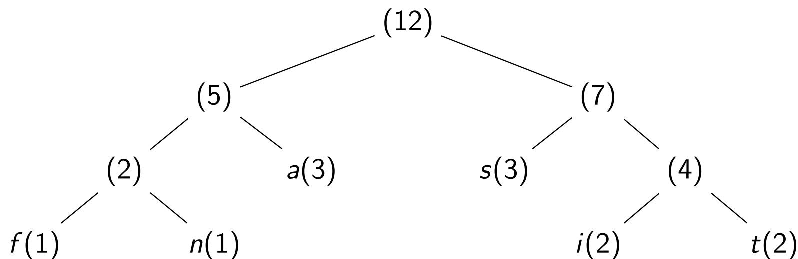


- La forêt ne contient plus qu'un seul arbre : on s'arrête là.

Exemple (suite)

À partir du texte « satisfaisant » :

- Assemblage d'arbres de fréquences 5 et 7



- La forêt ne contient plus qu'un seul arbre : on s'arrête là.
- L'algorithme impose que les chemins soient de longueur au moins 1 : le code correspondant au chemin ne doit pas être la chaîne vide.
  Si le texte a un seul caractère, on peut y ajouter un caractère fictif pour remplir cette condition.

Décoder

On utilise le texte encodé et l'arbre de Huffman

```
1  fonction decode(T;H)
2     entree : T texte encodé; H arbre de Huffman
3     sortie : T' texte décodé
4     T' ← texte vide
5     fonction aux(i,N)
6       entree : i position courante; N noeud courant
7       debut
8          si i < |T|
9           si N est une feuille
10              ajouter le caractère de N à T'
11              aux(i,H)
12          sinon
13              si T_i = 0
14                  aux(i+1,fils gauche de N)
15              sinon /* T_i vaut 1*/
16                  aux(i+1,fils droit de N)
17       fin
18    aux(0,H)
19    renvoyer T'
```

1. Présentation

2. Analyse
   - Correction
   - Complexité

1 Présentation

2 Analyse
- Correction
- Complexité

Correction

- Convention : N nombre de caractères du texte ; c_i caractère en position i du texte ; n_i nombre d'occurrences du caractère c_i ; f_i fréquence du caractère c_i : $f_i = \dfrac{n_i}{N}$.

Correction

- Convention : N nombre de caractères du texte ; c_i caractère en position i du texte ; n_i nombre d'occurrences du caractère c_i ; f_i fréquence du caractère c_i : $f_i = \dfrac{n_i}{N}$.
- On va montrer la propriété :

S_T est appelé *poids* (ou encore *évaluation*) de l'arbre T.

Correction

- Convention : N nombre de caractères du texte ; c_i caractère en position i du texte ; n_i nombre d'occurrences du caractère c_i ; f_i fréquence du caractère c_i : $f_i = \dfrac{n_i}{N}$.
- On va montrer la propriété :

Proposition

Soit T un arbre de Huffman dont les feuilles sont les caractères du texte. On appelle poids de T et note $S_T = \displaystyle\sum_{i \in feuilles(T)} f_i d_i$ où d_i est la profondeur du caractère c_i dans T, (c'est aussi la longueur du code du caractère c_i dans le texte compressé).
L'arbre H construit par l'algorithme de Huffman a le plus petit poids parmi les arbres de Huffman dont les feuilles sont les caractères du texte :
$S_H \leq S_T$ pour tout autre arbre de Huffman T de mêmes lettres.

S_T est appelé *poids* (ou encore *évaluation*) de l'arbre T.

Longueur du codage

- On observe que

$$N \times S_T = N \sum_{i \in \text{feuilles}(T)} f_i d_i = \sum_{i \in \text{feuilles}(T)} n_i d_i$$

Longueur du codage

- On observe que

$$N \times S_T = N \sum_{i \in \text{feuilles}(T)} f_i d_i = \sum_{i \in \text{feuilles}(T)} n_i d_i$$

- Cette quantité est la somme de toutes les longueurs des chemins allant de la racine aux feuilles pondérée par l'effectif.

Longueur du codage

- On observe que

$$N \times S_T = N \sum_{i \in \text{feuilles}(T)} f_i d_i = \sum_{i \in \text{feuilles}(T)} n_i d_i$$

- Cette quantité est la somme de toutes les longueurs des chemins allant de la racine aux feuilles pondérée par l'effectif.
- Or, chaque feuille i correspond à une unique lettre $\ell(i)$ du texte. Et la profondeur d_i est la taille du code de $\ell(i)$

$$N \times S_T = \sum_{i \in \text{feuilles}(T)} n_i \left|\text{code}(\ell(i))\right| = \sum_{c \in \text{texte}} n_c \left|\text{code}(c)\right|$$

Longueur du codage

- On observe que

$$N \times S_T = N \sum_{i \in \text{feuilles}(T)} f_i d_i = \sum_{i \in \text{feuilles}(T)} n_i d_i$$

- Cette quantité est la somme de toutes les longueurs des chemins allant de la racine aux feuilles pondérée par l'effectif.
- Or, chaque feuille i correspond à une unique lettre $\ell(i)$ du texte. Et la profondeur d_i est la taille du code de $\ell(i)$

$$N \times S_T = \sum_{i \in \text{feuilles}(T)} n_i \left|\text{code}(\ell(i))\right| = \sum_{c \in \text{texte}} n_c \left|\text{code}(c)\right|$$

- La quantité NS_T est donc la taille du texte compressé ! La propriété du transparent précédent, nous indique donc que le texte compressé par Huffman est le meilleur possible (parmi les compressions effectuées par remplacement de symboles).

Idée de la preuve par récurrence

Par récurrence sur le nombre de caractères.

- S'il n'y a que deux caractères, il n'y a que deux arbres entiers possibles à deux feuilles et ces deux arbres ont la même somme S. L'algorithme de Huffman produit l'un de ces deux arbres : il a donc une somme minimale.

Idée de la preuve par récurrence

Par récurrence sur le nombre de caractères.

- S'il n'y a que deux caractères, il n'y a que deux arbres entiers possibles à deux feuilles et ces deux arbres ont la même somme S. L'algorithme de Huffman produit l'un de ces deux arbres : il a donc une somme minimale.
- Hérédité : On suppose que si le nombre de caractères est $n \geq 2$, alors l'arbre de Huffamn H est optimal.

Idée de la preuve par récurrence

Par récurrence sur le nombre de caractères.

- S'il n'y a que deux caractères, il n'y a que deux arbres entiers possibles à deux feuilles et ces deux arbres ont la même somme S. L'algorithme de Huffman produit l'un de ces deux arbres : il a donc une somme minimale.
- Hérédité : On suppose que si le nombre de caractères est $n \geq 2$, alors l'arbre de Huffamn H est optimal.
    - Considérons un texte à $n+1$ caractères, H l'arbre construit par l'algorithme de *Huffman* et T_0 un arbre de Huffman construit avec les mêmes caractères tel que $S_H > S_{T_0}$.

Idée de la preuve par récurrence

Par récurrence sur le nombre de caractères.

- S'il n'y a que deux caractères, il n'y a que deux arbres entiers possibles à deux feuilles et ces deux arbres ont la même somme S. L'algorithme de Huffman produit l'un de ces deux arbres : il a donc une somme minimale.
- Hérédité : On suppose que si le nombre de caractères est $n \geq 2$, alors l'arbre de Huffamn H est optimal.
  - Considérons un texte à $n+1$ caractères, H l'arbre construit par l'algorithme de *Huffman* et T_0 un arbre de Huffman construit avec les mêmes caractères tel que $S_H > S_{T_0}$.
  - Soient x, y les 2 premiers caractères du texte « assemblés » par l'algorithme. Alors x et y sont fils d'un même nœud $((x, f_x), f_x + f_y, (y, f_y))$ dans l'arbre H. Et x, y ont les deux plus petites fréquences parmi les caractères du texte : la somme $f_x + f_y$ est minimale parmi les sommes de fréquences de deux caractères.

Idée de la preuve par récurrence (Hérédité suite)

- Dans l'arbre T_0, si x (resp. y) n'est pas à la profondeur maximale, on peut l'échanger avec une feuille z de profondeur maximale. On a $d_z > d_x$ et $f_z \geq f_x$. Le delta des contributions de x et z à la somme totale est

$$d_z f_x + d_x f_z - d_x f_x - d_z f_z = (d_z - d_x)(f_x - f_z) \leq 0$$

Le nouvel arbre a une somme plus petite que le précédent.

Idée de la preuve par récurrence (Hérédité suite)

- Dans l'arbre T_0, si x (resp. y) n'est pas à la profondeur maximale, on peut l'échanger avec une feuille z de profondeur maximale. On a $d_z > d_x$ et $f_z \geq f_x$. Le delta des contributions de x et z à la somme totale est

$$d_z f_x + d_x f_z - d_x f_x - d_z f_z = (d_z - d_x)(f_x - f_z) \leq 0$$

  Le nouvel arbre a une somme plus petite que le précédent.
- On fait de même avec y.
  Dans l'arbre T_1 ainsi construit on a $S_{T_1} \leq S_{T_0}$. Avec cette opération x, y sont maintenant à la profondeur maximale de T_1.

Idée de la preuve par récurrence (Hérédité suite)

- Dans l'arbre T_0, si x (resp. y) n'est pas à la profondeur maximale, on peut l'échanger avec une feuille z de profondeur maximale. On a $d_z > d_x$ et $f_z \geq f_x$. Le delta des contributions de x et z à la somme totale est

$$d_z f_x + d_x f_z - d_x f_x - d_z f_z = (d_z - d_x)(f_x - f_z) \leq 0$$

  Le nouvel arbre a une somme plus petite que le précédent.
- On fait de même avec y.
  Dans l'arbre T_1 ainsi construit on a $S_{T_1} \leq S_{T_0}$. Avec cette opération x, y sont maintenant à la profondeur maximale de T_1.
- De même, si x et y ne sont pas fils d'un même nœud de T_1, on peut les échanger avec d'autres feuilles de profondeur maximale pour que ce soit le cas. Avec cette opération, l'arbre T_2 construit vérifie $S_{T_2} \leq S_{T_1} \leq S_{T_0} < S_H$.

Idée de la preuve par récurrence (Hérédité suite et fin)

- Supprimons dans T_2 et H le nœud interne père de x, y et remplaçons le par une feuille $(y, f_x + f_y)$. On obtient deux arbres T' et H' tels que $S_{T'} = S_{T_2} - (f_x + f_y) \leq S_{T_0} - (f_x + f_y) < S_H - (f_x + f_y) = S_{H'}$.
En effet, la distance de x et de y à la racine dans T_2 est incrémenté de 1 par rapport à celle de y à la racine dans T'. idem pour H'.

Idée de la preuve par récurrence (Hérédité suite et fin)

- Supprimons dans T_2 et H le nœud interne père de x, y et remplaçons le par une feuille $(y, f_x + f_y)$. On obtient deux arbres T' et H' tels que $S_{T'} = S_{T_2} - (f_x + f_y) \leq S_{T_0} - (f_x + f_y) < S_H - (f_x + f_y) = S_{H'}$. En effet, la distance de x et de y à la racine dans T_2 est incrémenté de 1 par rapport à celle de y à la racine dans T'. idem pour H'.
- Dans le texte on remplace toute occurrence de x par y (donc y est de freq. $f_1 + f_2$). Alors H' est l'arbre de Huffman obtenu pour le nouveau texte (c'est l'idée, il reste du travail pour en être sûr). Comme ce texte n'a que n caractères, on a $S_{T'} \geq S_{H'}$ par HR. Contradiction avec $S_{T'} < S_{H'}$.

Arbres non entiers

- Nous avons imposé que les arbres de Huffman soient entiers et nous avons montré qu'un arbre entier construit par l'algorithme est optimal.

Arbres non entiers

- Nous avons imposé que les arbres de Huffman soient entiers et nous avons montré qu'un arbre entier construit par l'algorithme est optimal.
- On peut se demander s'il est intéressant d'élargir la notion : considérons, sans rien changer d'autre à la définition, que l'arbre vide est un arbre de Huffman de fréquence zéro. Les nœuds internes peuvent ainsi avoir un ou deux fils.

Arbres non entiers

- Nous avons imposé que les arbres de Huffman soient entiers et nous avons montré qu'un arbre entier construit par l'algorithme est optimal.
- On peut se demander s'il est intéressant d'élargir la notion : considérons, sans rien changer d'autre à la définition, que l'arbre vide est un arbre de Huffman de fréquence zéro. Les nœuds internes peuvent ainsi avoir un ou deux fils.
- On peut montrer (en exo ?) que si un tel arbre est non entier, alors il existe toujours un arbre entier de mêmes feuilles (c.a.d de mêmes lettres) de poids plus petit.

Arbres non entiers

- Nous avons imposé que les arbres de Huffman soient entiers et nous avons montré qu'un arbre entier construit par l'algorithme est optimal.
- On peut se demander s'il est intéressant d'élargir la notion : considérons, sans rien changer d'autre à la définition, que l'arbre vide est un arbre de Huffman de fréquence zéro. Les nœuds internes peuvent ainsi avoir un ou deux fils.
- On peut montrer (en exo ?) que si un tel arbre est non entier, alors il existe toujours un arbre entier de mêmes feuilles (c.a.d de mêmes lettres) de poids plus petit.
- Donc l'arbre de Hufman construit par l'algorithme, qui est entier, a encore le plus petits poids parmi ces nouveaux arbres.

1. Présentation
2. Analyse
   - Correction
   - Complexité

Complexité

- N taille du texte ; M nombre de caractères différents ; C nombre de bits du résultat de la compression.

Complexité

- N taille du texte ; M nombre de caractères différents ; C nombre de bits du résultat de la compression.
- Calcul des fréquences en $O(N)$.

Complexité

- N taille du texte ; M nombre de caractères différents ; C nombre de bits du résultat de la compression.
- Calcul des fréquences en $O(N)$.
- Construction de l'arbre de Huffman : on construit une file de priorité d'arbres-feuilles (file de taille M) en $O(M)$. Chaque retrait de deux arbres puis ajout de l'arbre assemblé est en $O(3\log(M))$. Donc coût de construction de l'arbre en $O(M \log M)$.

Complexité

- Construction du dictionnaire (caractère,code) : L'arbre (entier) construit contient M feuilles et $M-1$ nœuds internes.

Coût de cette étape $O(M^2)$.

Complexité

- Construction du dictionnaire (caractère,code) : L'arbre (entier) construit contient M feuilles et $M-1$ nœuds internes.
  - On gère un accumulateur en lui ajoutant un 0 (resp. 1) à chaque virage à gauche (resp. droite) lors d'un DFS : chaque arrivée à une feuille est l'occasion d'insérer une nouvelle association dans le dictionnaire.

Coût de cette étape $O(M^2)$.

Complexité

- Construction du dictionnaire (caractère,code) : L'arbre (entier) construit contient M feuilles et $M-1$ nœuds internes.
  - On gère un accumulateur en lui ajoutant un 0 (resp. 1) à chaque virage à gauche (resp. droite) lors d'un DFS : chaque arrivée à une feuille est l'occasion d'insérer une nouvelle association dans le dictionnaire.
  - Il y a $2M-1$ (c.a.d. nombre de nœuds) écritures dans l'accumulateur. La transformation des valeurs de l'accumulateur en **String** a le coût de la somme des longueurs des branches, donc au minimum $\Omega(M\log_2 M)$ qu'on peut majorer en $O(M^2)$ (il y a M branches, chacune occasionnant un coût en $O(M)$). L'ajout de chaque code au dictionnaire se fait avec un coût amorti constant.
    Au total : $O(M^2)$ pour le dictionnaire.

  Coût de cette étape $O(M^2)$.

Complexité

- Construction du dictionnaire (caractère,code) : L'arbre (entier) construit contient M feuilles et $M-1$ nœuds internes.
  - On gère un accumulateur en lui ajoutant un 0 (resp. 1) à chaque virage à gauche (resp. droite) lors d'un DFS : chaque arrivée à une feuille est l'occasion d'insérer une nouvelle association dans le dictionnaire.
  - Il y a $2M-1$ (c.a.d. nombre de nœuds) écritures dans l'accumulateur. La transformation des valeurs de l'accumulateur en **String** a le coût de la somme des longueurs des branches, donc au minimum $\Omega(M\log_2 M)$ qu'on peut majorer en $O(M^2)$ (il y a M branches, chacune occasionnant un coût en $O(M)$). L'ajout de chaque code au dictionnaire se fait avec un coût amorti constant.
    Au total : $O(M^2)$ pour le dictionnaire.

  Coût de cette étape $O(M^2)$.
- Enfin, la compression du texte fait grossir un tableau redimensionnable et consulte le dictionnaire à chaque caractère lu du texte (coût amorti $O(1)$ pour chacun des N caractères).
  Au total $O(N+M\log M+M^2+N)=O(N+M^2)$.

Complexité décompression

La décompression est aussi en $O(C)$ (lorsqu'on dispose de l'arbre ; que l'on doit donc joindre au fichier compressé).