Les arbres binaires

Lycée Thiers

Crédits

1. « Option informatique MPSI, MP/MP* », Roger Mansuy, paru chez Vuibert.
2. Wikipédia, arbres binaires
3. Un cours à Louis Le Grand

Résumé

≪ Les arbres permettent la réalisation de structures de données : structure persistante de dictionnaire, structure persistante de file de priorité. Ils permettent aussi de représenter des expressions arithmétiques ou des formules logiques ≫ (programme officiel CPGE 2013).

Exemple

FIGURE – Une arborescence de fichiers

Commentaire

La colonne de gauche est l'affichage arborescent de mon répertoire `Files` à l'aide de la commande UNIX
`tree Files/`

Exemple

FIGURE – Contenu d'un fichier html

```
<!DOCTYPE html>
<html lang="fr">
  <head>
    <meta charset="utf-8">
    <title>Inscrire un titre ici</title>
    <!-- On peut avoir d'autres méta-données ici -->
  </head>
  <body>
    <!-- Ici, on placera tout le contenu à destination
         de l'utilisateur -->
    <h1>Grosse police de caractères</h1>
    <h6>Petite police</h6>
  </body>
</html>
```

Commentaire

La colonne de gauche est le code d'un fichier `html`. Noter la présentation arborescente de ce langage de balises.

Exemple

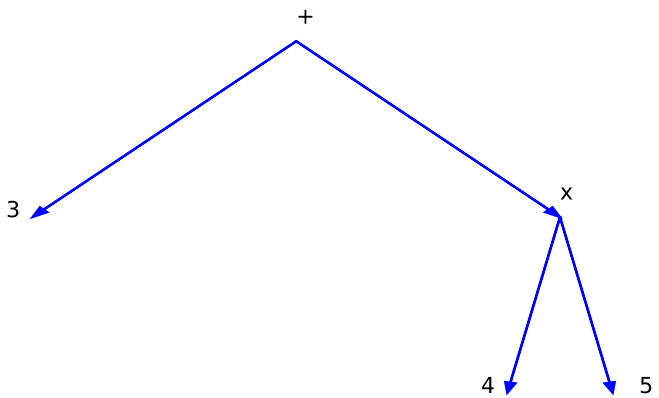
FIGURE – Affichage html

Commentaire

La colonne de gauche est l'interprétation du fichier précédent par `Firefox`.

Arithmétique

FIGURE – Une expression arithmétique

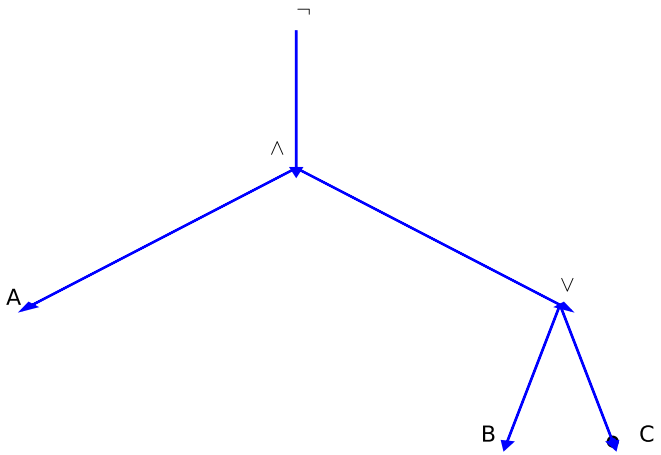


Commentaire

La colonne de gauche est la représentation arborescente de $3 + 4 \times 5$

Logique

FIGURE – Une expression logique



Commentaire

La colonne de gauche est la représentation arborescente de

$$\neg (A \wedge (B \vee C))$$

soit « Non (A et (B ou C)) »

Arbre binaire

Définition

Soient E un ensemble de cardinal au moins un ; **nil** un élément d'un ensemble sans intersection avec E ; C un symbole de constructeur ternaire sans intersection avec les précédents. On définit inductivement les *arbres binaires étiquetés par* E en convenant que :

Règle de base **nil** est un arbre binaire appelé *arbre vide*

Arbre binaire

Définition

Soient E un ensemble de cardinal au moins un ; **nil** un élément d'un ensemble sans intersection avec E ; C un symbole de constructeur ternaire sans intersection avec les précédents. On définit inductivement les *arbres binaires étiquetés par E* en convenant que :

Règle de base **nil** est un arbre binaire appelé *arbre vide*

Règle d'induction Si $x \in E$ et si F_g, F_d sont deux arbres binaires étiquetés par E, alors $A = C(F_g, x, F_d)$ est un arbre binaire étiqueté par E.

Arbre binaire

Définition

Soient E un ensemble de cardinal au moins un ; **nil** un élément d'un ensemble sans intersection avec E ; C un symbole de constructeur ternaire sans intersection avec les précédents. On définit inductivement les *arbres binaires étiquetés par E* en convenant que :

Règle de base **nil** est un arbre binaire appelé *arbre vide*

Règle d'induction Si $x \in E$ et si F_g, F_d sont deux arbres binaires étiquetés par E, alors $A = C(F_g, x, F_d)$ est un arbre binaire étiqueté par E.

Règle de complétude Seuls **nil** et les éléments que l'on peut former en un nombre fini d'application des règles d'induction sont des arbres binaires.

Remarque

Un arbre est donc un élément d'un ensemble inductif (voir chapitre précédent). On fait le choix dans la suite de ne pas utiliser de symbole pour le constructeur ternaire : on écrira (F_g, x, F_d) plutôt que $C(F_g, x, F_d)$. La raison est purement esthétique : cela alourdirait les transparents.

Vocabulaire

Avec les conventions de la définition 1 :

- x est appelée *étiquette* de la racine de A,

Vocabulaire

Avec les conventions de la définition 1 :

- x est appelée *étiquette* de la racine de A,
- Si $A = (F_g, x, F_d)$, on dit que F_g est le *fils gauche* de A, et F_d son *fils droit*. Ce sont des *sous-termes immédiats* de A.

Vocabulaire

Avec les conventions de la définition 1 :

- x est appelée *étiquette* de la racine de A,
- Si $A = (F_g, x, F_d)$, on dit que F_g est le *fils gauche* de A, et F_d son *fils droit*. Ce sont des *sous-termes immédiats* de A.
- On dit que A est le *père* de F_g. On dit parfois improprement que x est le père de F_g.

Vocabulaire

Avec les conventions de la définition 1 :

- x est appelée *étiquette* de la racine de A,
- Si $A = (F_g, x, F_d)$, on dit que F_g est le *fils gauche* de A, et F_d son *fils droit*. Ce sont des *sous-termes immédiats* de A.
- On dit que A est le *père* de F_g. On dit parfois improprement que x est le père de F_g.
- Si $F_g = F_d =$ **nil** on dit que A est un *arbre-feuille* ou plus simplement une *feuille*.

Vocabulaire

Avec les conventions de la définition 1 :

- x est appelée *étiquette* de la racine de A,
- Si $A = (F_g, x, F_d)$, on dit que F_g est le *fils gauche* de A, et F_d son *fils droit*. Ce sont des *sous-termes immédiats* de A.
- On dit que A est le *père* de F_g. On dit parfois improprement que x est le père de F_g.
- Si $F_g = F_d =$ **nil** on dit que A est un *arbre-feuille* ou plus simplement une *feuille*.
- Pour certains auteurs, les feuilles sont les **nil** ! !

Vocabulaire

Avec les conventions de la définition 1 :

- x est appelée *étiquette* de la racine de A,
- Si $A = (F_g, x, F_d)$, on dit que F_g est le *fils gauche* de A, et F_d son *fils droit*. Ce sont des *sous-termes immédiats* de A.
- On dit que A est le *père* de F_g. On dit parfois improprement que x est le père de F_g.
- Si $F_g = F_d = \textbf{nil}$ on dit que A est un *arbre-feuille* ou plus simplement une *feuille*.
- Pour certains auteurs, les feuilles sont les **nil** ! !
- Si $A = (\textbf{nil}, x, F_d)$, nous disons que A a un seul fils.

Vocabulaire

Avec les conventions de la définition 1 :

- Si A est un arbre, on appelle *chemin* tout n-uplet ($n > 0$) $A = A_0, \ldots, A_n$ tel que $A_0 = A$ et quel que soit $k < n$, A_{k+1} est un fils de A_k. Le nombre n est la *longueur du chemin*.
  Parfois, pour désigner un chemin, on ne donne que les étiquettes.

Vocabulaire

Avec les conventions de la définition 1 :

- Si A est un arbre, on appelle *chemin* tout n-uplet ($n > 0$) $A = A_0, \ldots, A_n$ tel que $A_0 = A$ et quel que soit $k < n$, A_{k+1} est un fils de A_k. Le nombre n est la *longueur du chemin*.
  Parfois, pour désigner un chemin, on ne donne que les étiquettes.
- Dans un chemin, tous les A_i avec $i > 0$ sont appelés des *descendants* de A. On dit aussi *sous-arbre* ou *sous-termes*.

Vocabulaire

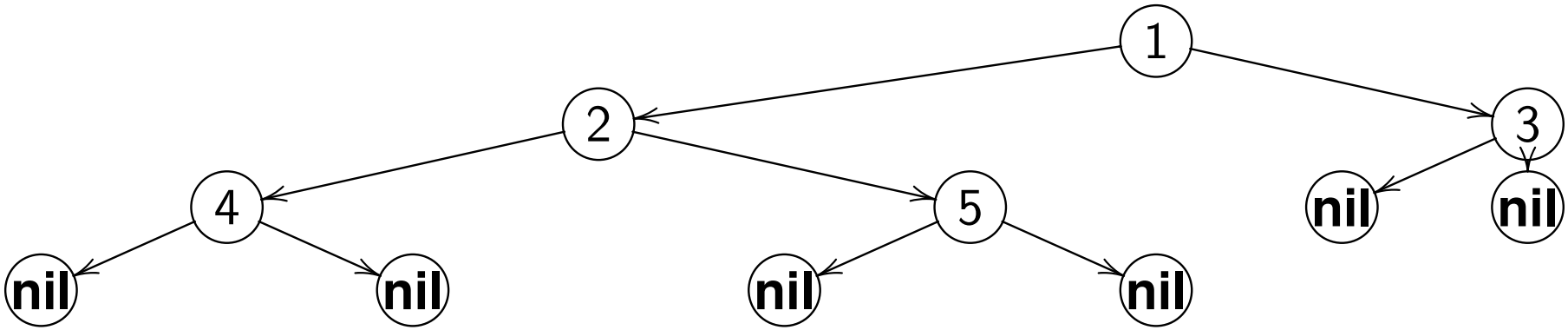
Avec les conventions de la définition 1 :

- Si A est un arbre, on appelle *chemin* tout n-uplet $(n > 0)$ $A = A_0, \ldots, A_n$ tel que $A_0 = A$ et quel que soit $k < n$, A_{k+1} est un fils de A_k. Le nombre n est la *longueur du chemin*.
  Parfois, pour désigner un chemin, on ne donne que les étiquettes.
- Dans un chemin, tous les A_i avec $i > 0$ sont appelés des *descendants* de A. On dit aussi *sous-arbre* ou *sous-termes*.
- Un *nœud interne* possède au moins un fils qui n'est pas l'arbre vide. Ce sont tous les nœuds d'un arbre à l'exception de **nil** et des feuilles.

Convention de représentation

Par convention, on ne représente ni **nil**, ni les arcs d'extrêmités **nil**. Au lieu de

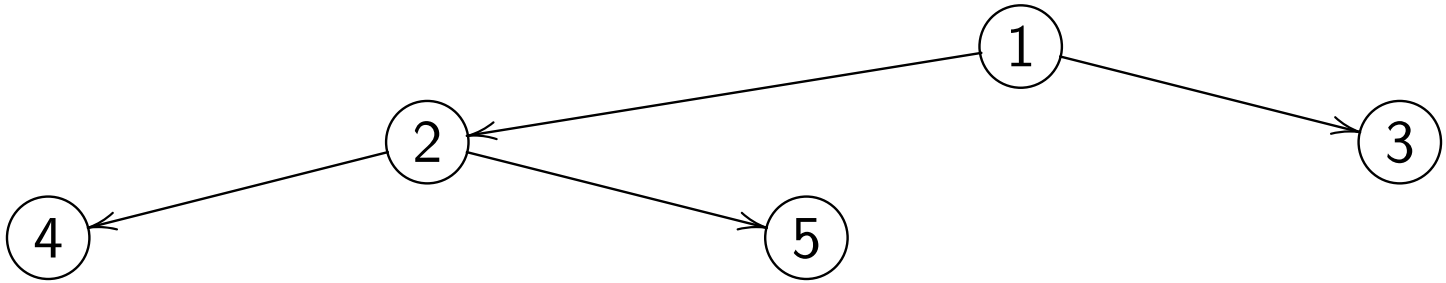
FIGURE – Avec **nil**



Convention de représentation

Par convention, on ne représente ni **nil**, ni les arcs d'extrêmités **nil**.
On représente

FIGURE – Sans **nil**



Propriétés

Lemme

Dans un arbre, aucun chemin ne comporte deux fois un même arbre non vide.

- Soit un chemin $A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_k$ tel que $A_i = A_j$.

Propriétés

Lemme

Dans un arbre, aucun chemin ne comporte deux fois un même arbre non vide.

- Soit un chemin $A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_k$ tel que $A_i = A_j$.
- Par application du théorème sur l'ordre structurel (voir chapitre induction), les tailles *structurelles* (nombres de constructeurs) sont strictement décroissantes.

Propriétés

Lemme

Dans un arbre, aucun chemin ne comporte deux fois un même arbre non vide.

- Soit un chemin $A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_k$ tel que $A_i = A_j$.
- Par application du théorème sur l'ordre structurel (voir chapitre induction), les tailles *structurelles* (nombres de constructeurs) sont strictement décroissantes.
- Ainsi $|A_i| > |A_j|$ et $A_i = A_j$:ABSURDE.

Types d'arbres binaires

1. Certains arbres ne sont pas binaires. Exemple : la figure 1).

1. Et nous avec !

Types d'arbres binaires

1. Certains arbres ne sont pas binaires. Exemple : la figure 1).
2. Un *arbre binaire entier* est un arbre dont tous les nœuds possèdent zéro ou deux fils (ex : la figure 4 mais pas 5).

1. Et nous avec !

Types d'arbres binaires

1. Certains arbres ne sont pas binaires. Exemple : la figure 1).
2. Un *arbre binaire entier* est un arbre dont tous les nœuds possèdent zéro ou deux fils (ex : la figure 4 mais pas 5).
3. Un *arbre binaire parfait* est un arbre binaire entier dans lequel toutes les feuilles sont à la même *distance* de la racine (c'est-à-dire à la même profondeur) (ex : la figure 7).

1. Et nous avec !

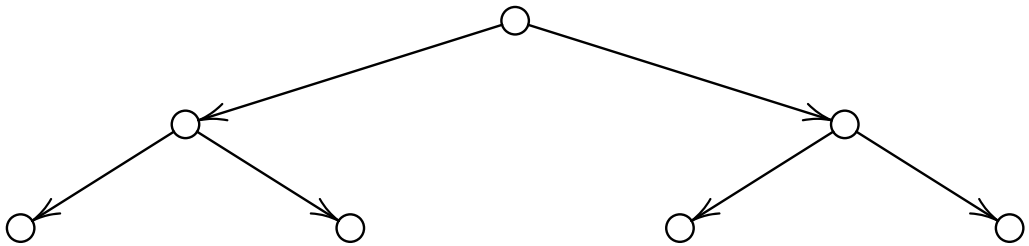
Types d'arbres binaires

1. Certains arbres ne sont pas binaires. Exemple : la figure 1).
2. Un *arbre binaire entier* est un arbre dont tous les nœuds possèdent zéro ou deux fils (ex : la figure 4 mais pas 5).
3. Un *arbre binaire parfait* est un arbre binaire entier dans lequel toutes les feuilles sont à la même *distance* de la racine (c'est-à-dire à la même profondeur) (ex : la figure 7).
4. L'arbre binaire parfait est parfois nommé arbre binaire *complet*. Cependant certains auteurs [1] définissent un arbre binaire complet comme étant un arbre binaire entier dans lequel les feuilles ont pour profondeur soit n soit $n-1$ pour un n donné (voir figure 8).

1. Et nous avec !

Arbres binaires

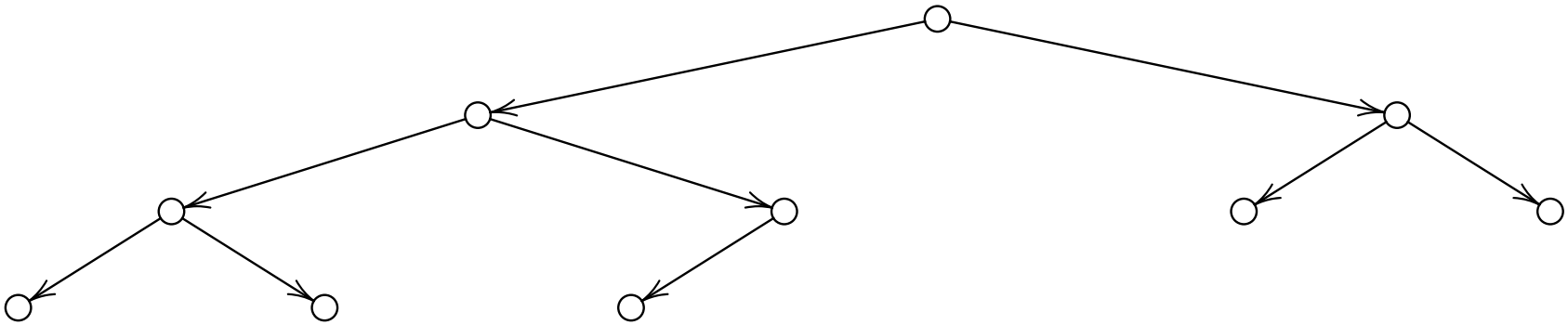
FIGURE – Un arbre binaire parfait



Tous les niveaux sont remplis.

Arbres binaires

FIGURE – Un arbre binaire complet gauche



Tous les niveaux sont complets sauf le dernier qui est rempli incomplètement en commençant par la gauche.

Ordre sur les arbres binaires

Définition

La relation binaire $\prec$ sur les arbres étiquetés par E définie par

$$A \preceq B \iff A \text{ est un descendant (strict) de } B$$

est un ordre bien fondé.
$\prec$ est un ordre strict.

Démonstration.

(MP2I) Un descendant est un sous-terme. Donc cet ordre n'est rien d'autre que l'ordre structurel (voir chapitre induction) lequel est bien fondé. □

Eléments sans prédecesseur de $\mathcal{A}$

Proposition

L'ensemble des éléments sans prédecesseur des arbres étiquetés par E est réduit à **nil**.

Soit un arbre A.

- Si $A =$ **nil**, il n'a pas de prédécesseur car le constructeur est d'arité 0.

Eléments sans prédecesseur de $\mathcal{A}$

Proposition

L'ensemble des éléments sans prédecesseur des arbres étiquetés par E est réduit à **nil**.

Soit un arbre A.

- Si $A = \textbf{nil}$, il n'a pas de prédécesseur car le constructeur est d'arité 0.
- Sinon, A est de la forme (F_g, x, F_d) et donc $F_g \prec A$. Donc A admet un prédécesseur.

Principe d'induction appliqué aux arbres

Soit P un prédicat sur $\mathcal{A}$

- On établit la propriété pour les éléments minimaux (donc $\{\textbf{nil}\}$).

Principe d'induction appliqué aux arbres

Soit P un prédicat sur $\mathcal{A}$

- On établit la propriété pour les éléments minimaux (donc $\{\textbf{nil}\}$).
- On prend A avec prédécesseur. On suppose que pour tout prdécesseur B de A, $P(B)$ est vrai, et on tente d'établir que $P(A)$ est vrai.

Fonctions inductives

Soit $\mathcal{A}$, l'ensemble des arbres étiquetés par E. De nombreuses fonction $f : \mathcal{A} \to F$ se définissent par la donnée d'un élément $a \in F$ et d'une application $\varphi : F \times E \times F \to F$ telles que

- $f(\textbf{nil}) = a$

Le principe d'induction établit que f est définie sur $\mathcal{A}$ et qu'elle prend ses valeurs dans F.

Fonctions inductives

Soit $\mathcal{A}$, l'ensemble des arbres étiquetés par E. De nombreuses fonction $f : \mathcal{A} \to F$ se définissent par la donnée d'un élément $a \in F$ et d'une application $\varphi : F \times E \times F \to F$ telles que

- $f(\textbf{nil}) = a$
- $\forall (F_g, F_d) \in \mathcal{A}^2, \forall x \in E, f(F_g, x, F_d) = \varphi(f(F_g), x, f(F_d))$

Le principe d'induction établit que f est définie sur $\mathcal{A}$ et qu'elle prend ses valeurs dans F.

Taille

La *taille* d'un arbre binaire est le nombre de ses nœuds qui ne sont pas **nil**

Définition

La *taille* d'un arbre A, notée $|A|$, se définie inductivement par :

- $|\mathbf{nil}| = 0$

Remarque

Cette définition est différente de la taille structurelle vue au chapitre induction en ce sens qu'elle ne compte pas les constructeurs d'arité 0.
La définition varie selon les auteurs : il faut donc bien lire l'énoncé.

Taille

La *taille* d'un arbre binaire est le nombre de ses nœuds qui ne sont pas **nil**

Définition

La *taille* d'un arbre A, notée $|A|$, se définie inductivement par :

- $|\mathbf{nil}| = 0$
- $\forall (F_g, F_d) \in \mathcal{A}^2, \forall x \in E, |(F_g, x, F_d)| = 1 + |F_g| + |F_d|$

Remarque

Cette définition est différente de la taille structurelle vue au chapitre induction en ce sens qu'elle ne compte pas les constructeurs d'arité 0.
La définition varie selon les auteurs : il faut donc bien lire l'énoncé.

Profondeur

La *hauteur* d'un arbre binaire est la longueur de la plus longue branche (sans arriver jusqu'à **nil**).

Définition

La *hauteur* d'un arbre binaire A, notée $h(A)$, est la fonction définie inductivement par :

- $h(\textbf{nil}) = -1$

La *profondeur* d'un nœud dans un arbre binaire est la longueur du chemin qui le relie à la racine.

Remarque

Là encore, la définition varie selon les auteurs.

Profondeur

La *hauteur* d'un arbre binaire est la longueur de la plus longue branche (sans arriver jusqu'à **nil**).

Définition

La *hauteur* d'un arbre binaire A, notée $h(A)$, est la fonction définie inductivement par :

- $h(\textbf{nil}) = -1$
- $\forall (F_g, F_d) \in \mathcal{A}^2, \forall x \in E, h((F_g, x, F_d)) = 1 + \max(h(F_g), h(F_d))$

La *profondeur* d'un nœud dans un arbre binaire est la longueur du chemin qui le relie à la racine.

Remarque

Là encore, la définition varie selon les auteurs.

Un type OCAML pour les arbres binaires

```
(*type possible pour les arbres binaires*)
type 'a arbre =
    Nil | Node of ('a arbre * 'a * 'a arbre);;

let a = let b = Node (Nil, 1, Nil) and c =
Node (Nil, 2, Nil) and d = Node (Nil, 4, Nil) in
let g = Node (b,4,c) and f= Node (Nil, 5, Node(d,3,Nil))
in Node(g,6,f);;(*un arbre à représenter*)
```

Hauteur et taille

```
let rec taille a =
  match a with
  | Nil -> 0
  | Node(g,_,d)->1+taille g+taille d;;

let rec hauteur a =
  match a with
  | Nil -> -1
  | Node(g,_,d)->1+ (max (hauteur g) (hauteur d));;
```

- On observe d'abord que pour ces fonctions, la complexité au pire est croissante avec la taille de la variable.

Hauteur et taille

```
let rec taille a =
  match a with
  | Nil -> 0
  | Node(g,_,d)->1+taille g+taille d;;

let rec hauteur a =
  match a with
  | Nil -> -1
  | Node(g,_,d)->1+ (max (hauteur g) (hauteur d));;
```

- On observe d'abord que pour ces fonctions, la complexité au pire est croissante avec la taille de la variable.
- En effet, soit A un arbre avec n nœuds qui atteint le maximum de complexité. Pour $(A, x, \textbf{nil})$, qui a $n+1$ nœuds, le calcul nécessite au moins une opération de plus (ne serait-ce que le filtrage).

Complexité du calcul de la hauteur

Méthode informelle

Pour un arbre de taille n

- De façon empirique on peut dire que chaque nœud est parcouru trois fois : quand on y accède (au moment du filtrage), quand le parcours revient du fils gauche (avec l'info sur sa hauteur), quand il revient du fils droit (avec l'info sur sa hauteur).

Complexité du calcul de la hauteur

Méthode informelle

Pour un arbre de taille n

- De façon empirique on peut dire que chaque nœud est parcouru trois fois : quand on y accède (au moment du filtrage), quand le parcours revient du fils gauche (avec l'info sur sa hauteur), quand il revient du fils droit (avec l'info sur sa hauteur).
- Pour chacun de ces trois passages dans le nœud, le nombre d'opérations élémentaires hors appels récursifs est borné par une constante (disons c).

Complexité du calcul de la hauteur

Méthode informelle

Pour un arbre de taille n

- De façon empirique on peut dire que chaque nœud est parcouru trois fois : quand on y accède (au moment du filtrage), quand le parcours revient du fils gauche (avec l'info sur sa hauteur), quand il revient du fils droit (avec l'info sur sa hauteur).
- Pour chacun de ces trois passages dans le nœud, le nombre d'opérations élémentaires hors appels récursifs est borné par une constante (disons c).
- Au total, on peut donc majorer le nombre d'opérations par $3nc$ et le minorer par n.

Complexité du calcul de la hauteur

Méthode informelle

Pour un arbre de taille n

- De façon empirique on peut dire que chaque nœud est parcouru trois fois : quand on y accède (au moment du filtrage), quand le parcours revient du fils gauche (avec l'info sur sa hauteur), quand il revient du fils droit (avec l'info sur sa hauteur).
- Pour chacun de ces trois passages dans le nœud, le nombre d'opérations élémentaires hors appels récursifs est borné par une constante (disons c).
- Au total, on peut donc majorer le nombre d'opérations par $3nc$ et le minorer par n.
- Donc complexité en $\Theta(n)$

Relation entre taille et hauteur

Proposition

Soit A un arbre. Alors $h(A) + 1 \leq |A| \leq 2^{h(A)+1} - 1$. Et les bornes sont atteintes.

Preuve par induction

- Si $A = \textbf{nil}$, alors $|A| = 0$; $h(A) = -1$. $-1 + 1 \leq 0 \leq 2^{-1+1} - 1$. OK

Relation entre taille et hauteur

Proposition

Soit A un arbre. Alors $h(A)+1 \leq |A| \leq 2^{h(A)+1}-1$. Et les bornes sont atteintes.

Preuve par induction

- Si $A = \textbf{nil}$, alors $|A| = 0$; $h(A) = -1$. $-1+1 \leq 0 \leq 2^{-1+1}-1$. OK
- Si $A = (G, x, D)$, et si la propriété est vraie pour G, D, alors

$$|A| = 1 + |G| + |D| \geq$$
$$1 + h(G) + 1 + h(D) + 1 \geq 1 + (1 + \max(h(G), h(D))) = 1 + h(A)$$

$$\text{Et } |A| = 1 + |G| + |D| \leq 1 + 2^{h(G)+1} - 1 + 2^{h(D)+1} - 1$$
$$\leq -1 + 2 \cdot 2^{\max(h(G),h(D))+1} = 2 \cdot 2^{h(A)} - 1 = 2^{h(A)+1} - 1$$

Relation entre taille et hauteur

Proposition

Soit A un arbre. Alors $h(A)+1 \leq |A| \leq 2^{h(A)+1}-1$. Et les bornes sont atteintes.

Preuve par induction

- Si $A = \textbf{nil}$, alors $|A| = 0$; $h(A) = -1$. $-1+1 \leq 0 \leq 2^{-1+1}-1$. OK
- Si $A = (G, x, D)$, et si la propriété est vraie pour G, D, alors

$$|A| = 1 + |G| + |D| \geq$$
$$1 + h(G) + 1 + h(D) + 1 \geq 1 + (1 + \max(h(G), h(D))) = 1 + h(A)$$

$$\text{Et } |A| = 1 + |G| + |D| \leq 1 + 2^{h(G)+1} - 1 + 2^{h(D)+1} - 1$$
$$\leq -1 + 2 \cdot 2^{\max(h(G),h(D))+1} = 2 \cdot 2^{h(A)} - 1 = 2^{h(A)+1} - 1$$

Les deux bornes sont atteintes : à gauche par les listes chaînées et à droite par les arbres parfaits.

Profondeur moyenne

La *profondeur moyenne* d'un arbre est la moyenne des longueurs de ses branches ou encore la moyenne des profondeurs des feuilles.

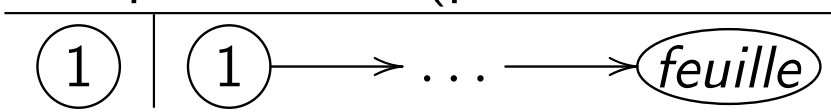
Proposition

Dans un arbre binaire à $n > 0$ feuilles, la profondeur moyenne est égale ou supérieure à $\log_2(n)$

Profondeur moyenne (cas de base)

Par récurrence sur le nombre de feuille n de A, on montre que la profondeur moyenne m_A est plus grande que $\log_2(n)$.

- Vrai pour $n = 1$ (profondeur au moins zéro, $\log_2 1 = 0$).

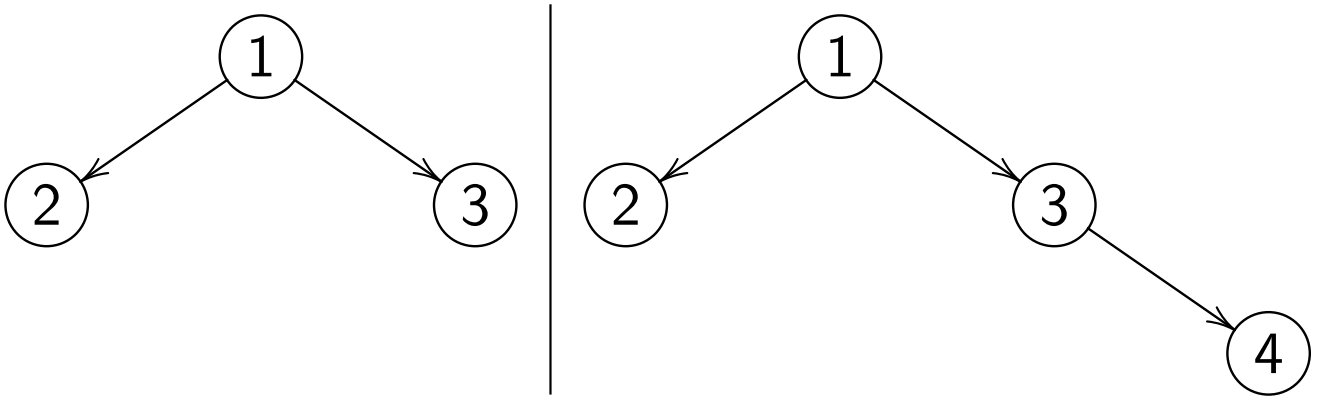


Profondeur moyenne (cas de base)

Par récurrence sur le nombre de feuille n de A, on montre que la profondeur moyenne m_A est plus grande que $\log_2(n)$.

- Vrai pour $n = 1$ (profondeur au moins zéro, $\log_2 1 = 0$).

- Si $n = 2$, la plus petite profondeur moyenne intervient quand les deux feuilles sont à la profondeur 1. Alors la profondeur moyenne vaut 1 et $\log_2 2 = 1$. Si l'une des feuilles n'est pas à la profondeur 1, la profondeur moyenne est strictement supérieure à $\log_2 2$.



Profondeur moyenne

Cas d'un fils unique

Par récurrence sur le nombre de feuille n de A, on montre que la profondeur moyenne m_A est plus grande que $\log_2(n)$.
Supposons la propriété vraie pour tout arbre binaire d'au plus n feuilles ($2 \leq n$).
On se donne un arbre A de $n+1$ feuilles ($n \geq 2$).
Si A n'a qu'un fils, on se ramène au problème à deux fils :

- L'unique fils F de A a autant de feuilles que A mais la profondeur de ses feuilles est plus petite (car $m_A = m_F + 1$).

Profondeur moyenne

Cas d'un fils unique

Par récurrence sur le nombre de feuille n de A, on montre que la profondeur moyenne m_A est plus grande que $\log_2(n)$.
Supposons la propriété vraie pour tout arbre binaire d'au plus n feuilles ($2 \leq n$).
On se donne un arbre A de $n+1$ feuilles ($n \geq 2$).
Si A n'a qu'un fils, on se ramène au problème à deux fils :

- L'unique fils F de A a autant de feuilles que A mais la profondeur de ses feuilles est plus petite (car $m_A = m_F + 1$).
- En descendant dans l'arbre on finit par trouver un premier descendant D qui a deux fils (car A a au moins deux feuilles) et $n+1$ feuilles.

Profondeur moyenne

Cas d'un fils unique

Par récurrence sur le nombre de feuille n de A, on montre que la profondeur moyenne m_A est plus grande que $\log_2(n)$.
Supposons la propriété vraie pour tout arbre binaire d'au plus n feuilles $(2 \leq n)$.
On se donne un arbre A de $n+1$ feuilles $(n \geq 2)$.
Si A n'a qu'un fils, on se ramène au problème à deux fils :

- L'unique fils F de A a autant de feuilles que A mais la profondeur de ses feuilles est plus petite (car $m_A = m_F + 1$).
- En descendant dans l'arbre on finit par trouver un premier descendant D qui a deux fils (car A a au moins deux feuilles) et $n+1$ feuilles.
- On montre donc la propriété pour D, elle sera vraie pour A car la profondeur moyenne y est plus grande.

Profondeur moyenne (deux fils et $n+1$ feuilles)

- On suppose que A a deux fils F_g, F_d. Soit k tel que F_g possède k feuilles ($n+1 > k \geq 1$), F_d en a $n+1-k$

Profondeur moyenne (deux fils et $n+1$ feuilles)

- On suppose que A a deux fils F_g, F_d. Soit k tel que F_g possède k feuilles ($n+1 > k \geq 1$), F_d en a $n+1-k$
- Relation moyenne/ somme des profondeurs :

  On a à gauche $\dfrac{\sum_{i=1}^{k} p_i^g}{k} = m_g$ (Notation : p_i^g = profondeur de la feuille i du fils gauche, m_g moyenne des profondeurs à gauche).

$$\text{Gauche} : \sum_{i=1}^{k} p_i^g = k \underbrace{m_g}_{\text{prof. moy.}} \underbrace{\geq}_{\text{par HR}} k \log_2 k$$

$$\text{Droite} : \sum_{i=1}^{n+1-k} p_i^d = (n+1-k) m_d \quad \geq \quad (n+1-k)\log_2(n+1-k)$$

Profondeur moyenne (deux fils et $n+1$ feuilles)

Rappel : On suppose que A a deux fils F_g, F_d. Soit k tel que F_g possède k feuilles ($n+1 > k \geq 1$), F_d en a $n+1-k$
La somme des profondeurs des feuilles dans A vérifie

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{r=1}^{n+1} p_r \\ &= \sum_{i=1}^{k}(1+p_i^g) + \sum_{i=1}^{n+1-k}(1+p_i^d) \\ &= n+1+\sum_{i=1}^{k} p_i^g + \sum_{i=1}^{n+1-k} p_i^d \\ &\geq n+1+k\log_2 k + (n+1-k)\log_2(n+1-k). \end{aligned}$$

Profondeur moyenne

Deux fils et $n+1$ feuilles

La somme S_{n+1} des profondeurs est
$S_{n+1} \geq n+1+k\log_2 k+(n+1-k)\log_2(n+1-k)$

- La fonction $f : k \mapsto k\log_2 k+(n+1-k)\log_2(n+1-k)$ se dérive en $k \mapsto \log_2(k)-\log_2(n+1-k)$.

Profondeur moyenne

Deux fils et $n+1$ feuilles

La somme S_{n+1} des profondeurs est
$S_{n+1} \geq n+1+k\log_2 k+(n+1-k)\log_2(n+1-k)$

- La fonction $f : k \mapsto k\log_2 k+(n+1-k)\log_2(n+1-k)$ se dérive en $k \mapsto \log_2(k)-\log_2(n+1-k)$.
- Cette dérivée s'annule en $\frac{n+1}{2}$, $f'(1)<0, f'(n)>0$ donc $f(\frac{n+1}{2})$ est minimale.

Profondeur moyenne

Deux fils et $n+1$ feuilles

La somme S_{n+1} des profondeurs est
$S_{n+1} \geq n+1+k\log_2 k+(n+1-k)\log_2(n+1-k)$

- La fonction $f : k \mapsto k\log_2 k+(n+1-k)\log_2(n+1-k)$ se dérive en $k \mapsto \log_2(k)-\log_2(n+1-k)$.
- Cette dérivée s'annule en $\frac{n+1}{2}$, $f'(1)<0, f'(n)>0$ donc $f(\frac{n+1}{2})$ est minimale.
- Par suite

$$f(k) = k\log_2 k+(n+1-k)\log_2(n+1-k) \quad \geq$$
$$f(\frac{n+1}{2}) = (n+1)\log_2(\frac{n+1}{2})$$

Profondeur moyenne

Deux fils et $n+1$ feuilles

Rappel : La somme S_{n+1} des profondeurs vérifie
$S_{n+1} \geq n+1+k\log_2 k+(n+1-k)\log_2(n+1-k)$

- Alors la moyenne $m_A = \dfrac{S_{n+1}}{n+1}$ des profondeurs vérifie

$$\begin{aligned}(n+1)m_A &= \sum_{r=1}^{n+1} p_r \\ &\geq n+1+(n+1)\log_2(\frac{n+1}{2}) \\ &= n+1+(n+1)\log_2(n+1)-(n+1) \\ &= (n+1)\log_2(n+1)\end{aligned}$$

Profondeur moyenne

Deux fils et $n+1$ feuilles

Rappel : La somme S_{n+1} des profondeurs vérifie
$S_{n+1} \geq n+1+k\log_2 k+(n+1-k)\log_2(n+1-k)$

- Alors la moyenne $m_A = \dfrac{S_{n+1}}{n+1}$ des profondeurs vérifie

$$\begin{aligned}(n+1)m_A &= \sum_{r=1}^{n+1} p_r \\ &\geq n+1+(n+1)\log_2(\frac{n+1}{2}) \\ &= n+1+(n+1)\log_2(n+1)-(n+1) \\ &= (n+1)\log_2(n+1)\end{aligned}$$

- Donc $m_A \geq \log_2(n+1)$: OK !

Tri par comparaison

- Un *tri par comparaison* est un type d'algorithme de tri qui lit uniquement les éléments de la liste via une seule opération de comparaison ($\leq$ ou $\geq$ par exemple). Cette opération effectuée sur deux éléments détermine lequel des deux doit apparaître en premier dans la liste triée finale (exemples : tri fusion, tri rapide, tri insertion, tri par tas).

Tri par comparaison

- Un *tri par comparaison* est un type d'algorithme de tri qui lit uniquement les éléments de la liste via une seule opération de comparaison ($\leq$ ou $\geq$ par exemple). Cette opération effectuée sur deux éléments détermine lequel des deux doit apparaître en premier dans la liste triée finale (exemples : tri fusion, tri rapide, tri insertion, tri par tas).
- Le tri casier n'est pas un tri par compraison.

Application aux tris par comparaison

Permutation associée à une liste

Considérons un tri par comparaison T donné (par ex : tri fusion ou tri insertion).

- Considérons une liste (ou un tableau) à n nombres tous distincts. La complexité du tri sur cette structure ne dépend pas des valeurs de ces nombres mais de l'ordre initial dans lequel ils sont placés.

Application aux tris par comparaison

Permutation associée à une liste

Considérons un tri par comparaison T donné (par ex : tri fusion ou tri insertion).

- Considérons une liste (ou un tableau) à n nombres tous distincts. La complexité du tri sur cette structure ne dépend pas des valeurs de ces nombres mais de l'ordre initial dans lequel ils sont placés.
- Classer $[12; 50; 3; 28; 46]$ a la même complexité que le classement de $[2; 5; 1; 3; 4]$ (permutation d'éléments dans $[\![1, n]\!]$).

Application aux tris par comparaison

Permutation associée à une liste

Considérons un tri par comparaison T donné (par ex : tri fusion ou tri insertion).

- Considérons une liste (ou un tableau) à n nombres tous distincts. La complexité du tri sur cette structure ne dépend pas des valeurs de ces nombres mais de l'ordre initial dans lequel ils sont placés.
- Classer $[12; 50; 3; 28; 46]$ a la même complexité que le classement de $[2; 5; 1; 3; 4]$ (permutation d'éléments dans $[\![1, n]\!]$).
- A une liste L de n nombres distincts à trier, on associe ainsi une unique permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$.
  Le coût $C(L)$ du tri de L selon l'algorithme T dépend seulement de σ (ordre des éléments) et on le note donc $C(\sigma)$.

Application aux tris

Complexité en moyenne

Définition

La *complexité en moyenne* $c(n)$ du tri selon l'algo T des liste de taille n est le coût moyen des permutations associées :

$$c(n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} C(\sigma).$$

Application aux tris

Arbre de décision

- Un *arbre de décision* est un arbre binaire tel que

Application aux tris

Arbre de décision

- Un *arbre de décision* est un arbre binaire tel que
  - chaque nœud interne est étiqueté avec une comparaison,

Application aux tris

Arbre de décision

- Un *arbre de décision* est un arbre binaire tel que
  - chaque nœud interne est étiqueté avec une comparaison,
  - chaque feuille est étiquetée avec une permutation

Application aux tris

Arbre de décision

- Un *arbre de décision* est un arbre binaire tel que
  - chaque nœud interne est étiqueté avec une comparaison,
  - chaque feuille est étiquetée avec une permutation
- A un algorithme de tri appliqué à des listes de taille n on associe un arbre binaire de décision unique (admis). Une permutation donnée est l'extrémité d'une branche complète de l'arbre.

Application aux tris

Arbre de décision

- Un *arbre de décision* est un arbre binaire tel que
  - chaque nœud interne est étiqueté avec une comparaison,
  - chaque feuille est étiquetée avec une permutation
- A un algorithme de tri appliqué à des listes de taille n on associe un arbre binaire de décision unique (admis). Une permutation donnée est l'extrémité d'une branche complète de l'arbre.
- On construit ainsi cet arbre de décision : La racine est la première comparaison observée entre éléments. Son fils gauche est la première comparaison effectuée lorsque le test correspondant à la racine est positif, le droit est la première comparaison effectuée si le premier test est négatif etc.

Application aux tris

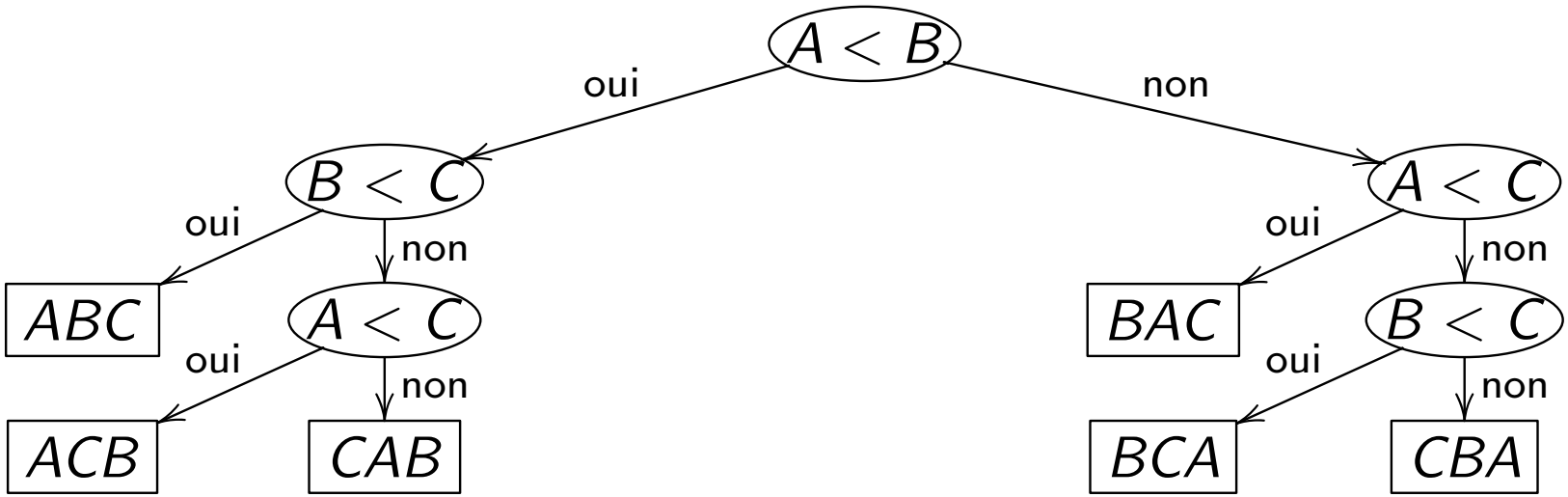
Arbre de décision

- Un *arbre de décision* est un arbre binaire tel que
  - chaque nœud interne est étiqueté avec une comparaison,
  - chaque feuille est étiquetée avec une permutation
- A un algorithme de tri appliqué à des listes de taille n on associe un arbre binaire de décision unique (admis). Une permutation donnée est l'extrémité d'une branche complète de l'arbre.
- On construit ainsi cet arbre de décision : La racine est la première comparaison observée entre éléments. Son fils gauche est la première comparaison effectuée lorsque le test correspondant à la racine est positif, le droit est la première comparaison effectuée si le premier test est négatif etc.
- L'arbre de décision associé à un tri par comparaison sur des structures de longueur n est unique (c'est une affirmation, pas une preuve : il faudrait le montrer) et il a $n!$ feuilles (autant que de permutations).

Application aux tris

Exemple

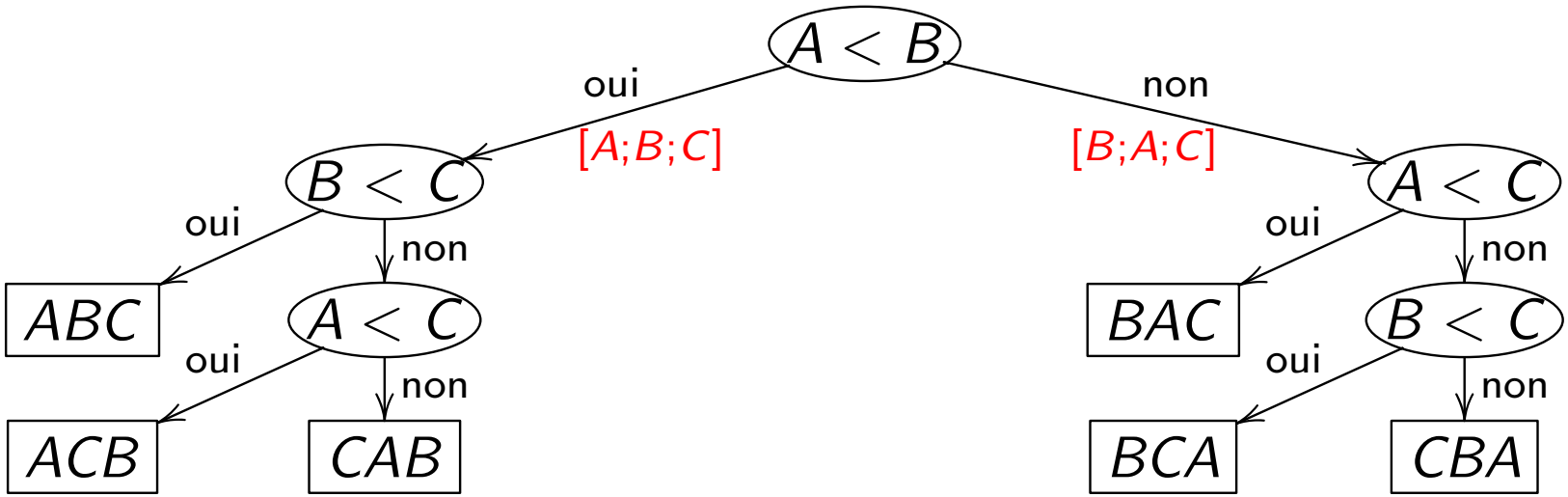
Arbre de décision du tri par insertion pour les listes $[A; B; C]$



Application aux tris

Exemple

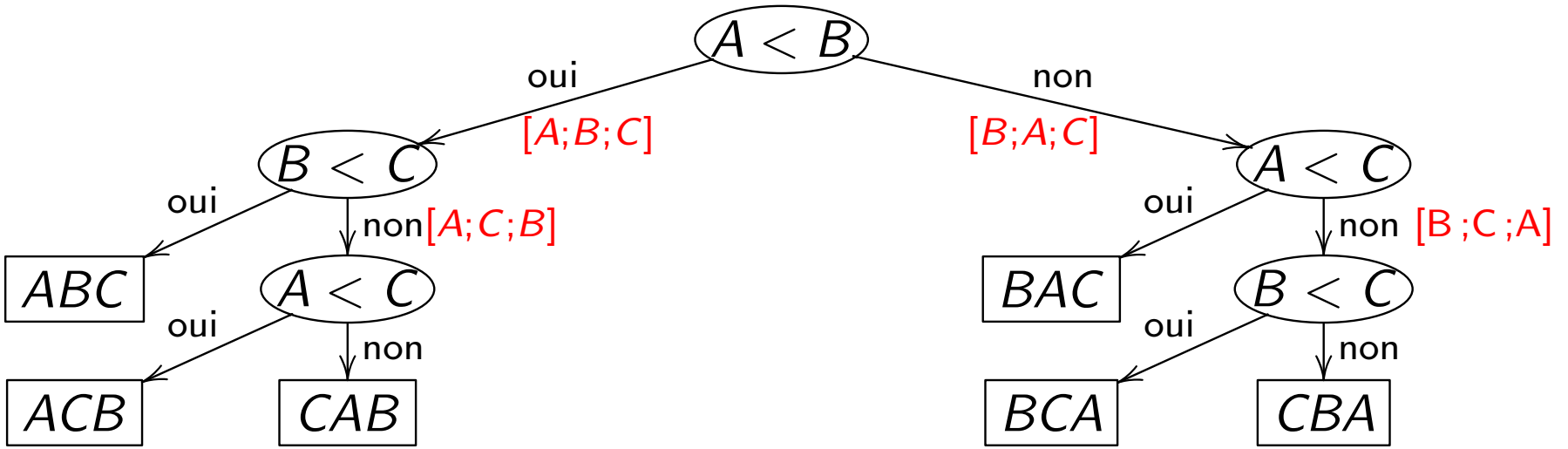
Arbre de décision du tri par insertion pour les listes $[A; B; C]$



Application aux tris

Exemple

Arbre de décision du tri par insertion pour les listes $[A; B; C]$



Application aux tris

Complexité en moyenne à partir de l'arbre de décision

Soit un tri T et son arbre de décision A.

- La complexité du tri par T d'une liste L de longueur n est proportionnelle à la longueur de la branche de A empruntée en traitant L.
  Si L est associée à la permutation σ, la feuille sur laquelle arrive l'algorithme en traitant L est la permutation réciproque σ^{-1} (car $\sigma \circ \sigma^{-1} = \mathrm{id}_{\mathcal{S}_n}$)
  Exemple : Si L est associe à la permutation $[2, 3, 1]$ on arrive sur la feuille **CAB** qui correspond à la permutation $[3, 1, 2]$ réciproque de la précédente.

Application aux tris

Complexité en moyenne à partir de l'arbre de décision

Soit un tri T et son arbre de décision A.

- La complexité du tri par T d'une liste L de longueur n est proportionnelle à la longueur de la branche de A empruntée en traitant L.
- La complexité en moyenne de T est donc proportionnelle à la profondeur moyenne des $n!$ feuilles.

Application aux tris

Complexité en moyenne à partir de l'arbre de décision

Soit un tri T et son arbre de décision A.

- La complexité du tri par T d'une liste L de longueur n est proportionnelle à la longueur de la branche de A empruntée en traitant L.
- La complexité en moyenne de T est donc proportionnelle à la profondeur moyenne des $n!$ feuilles.
- Or, celle-ci est minorée par $\log_2(n!)$ Et la formule de Stirling nous donne $\log_2(n!) = \Theta(n \log n)$.

Application aux tris

Complexité en moyenne à partir de l'arbre de décision

Soit un tri T et son arbre de décision A.

- La complexité du tri par T d'une liste L de longueur n est proportionnelle à la longueur de la branche de A empruntée en traitant L.
- La complexité en moyenne de T est donc proportionnelle à la profondeur moyenne des $n!$ feuilles.
- Or, celle-ci est minorée par $\log_2(n!)$ Et la formule de Stirling nous donne $\log_2(n!) = \Theta(n \log n)$.
- Ainsi, la meilleure complexité possible en moyenne pour un tri par comparaison est $\Theta(n \log n)$.

Application aux tris

Complexité en moyenne à partir de l'arbre de décision

Soit un tri T et son arbre de décision A.

- La complexité du tri par T d'une liste L de longueur n est proportionnelle à la longueur de la branche de A empruntée en traitant L.
- La complexité en moyenne de T est donc proportionnelle à la profondeur moyenne des $n!$ feuilles.
- Or, celle-ci est minorée par $\log_2(n!)$ Et la formule de Stirling nous donne $\log_2(n!) = \Theta(n \log n)$.
- Ainsi, la meilleure complexité possible en moyenne pour un tri par comparaison est $\Theta(n \log n)$.
- La complexité au pire est supérieure à la complexité en moyenne. Un algorithme qui, comme le tri fusion, réalise une complexité au pire en $\Theta(n \log n)$ est donc un algorithme de tri par comparaison optimal.

Objectif

Un *parcours d'arbre* est une façon d'ordonner les nœuds d'un arbre afin de tous les parcourir.
On peut le voir comme une fonction qui à un arbre associe une liste de ses nœuds même si la liste n'est souvent pas explicitement construite par le parcours.

Depth-first search (DFS)

Les *parcours en profondeur* se définissent de manière récursive sur les arbres. Le parcours d'un arbre consiste à traiter la racine de l'arbre et à parcourir récursivement les sous-arbres gauche et droit de la racine.
Les parcours *préfixe, infixe et suffixe* se distinguent par l'ordre dans lequel sont faits ces trois traitements.

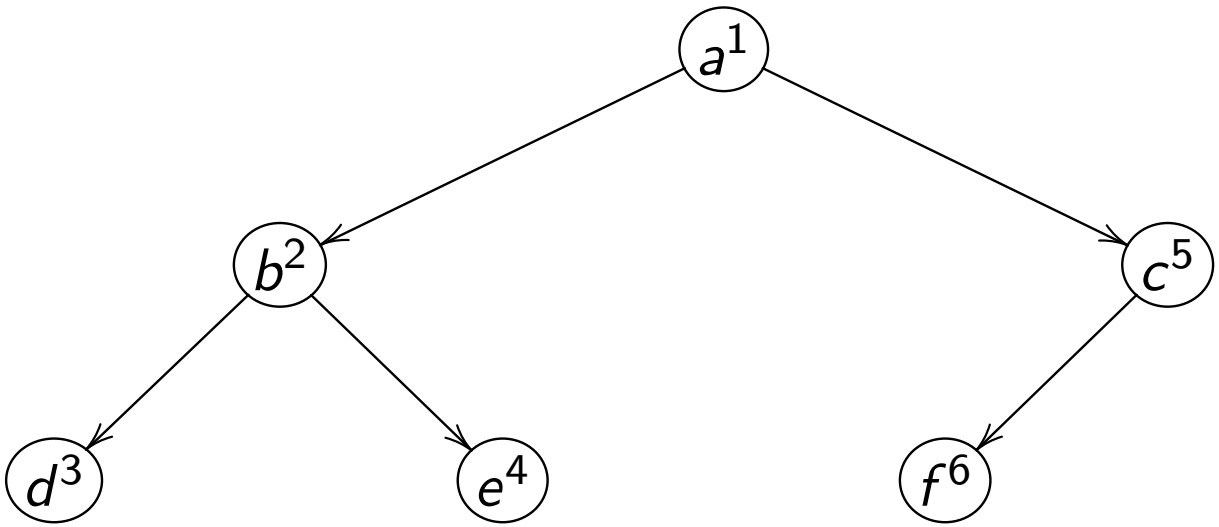


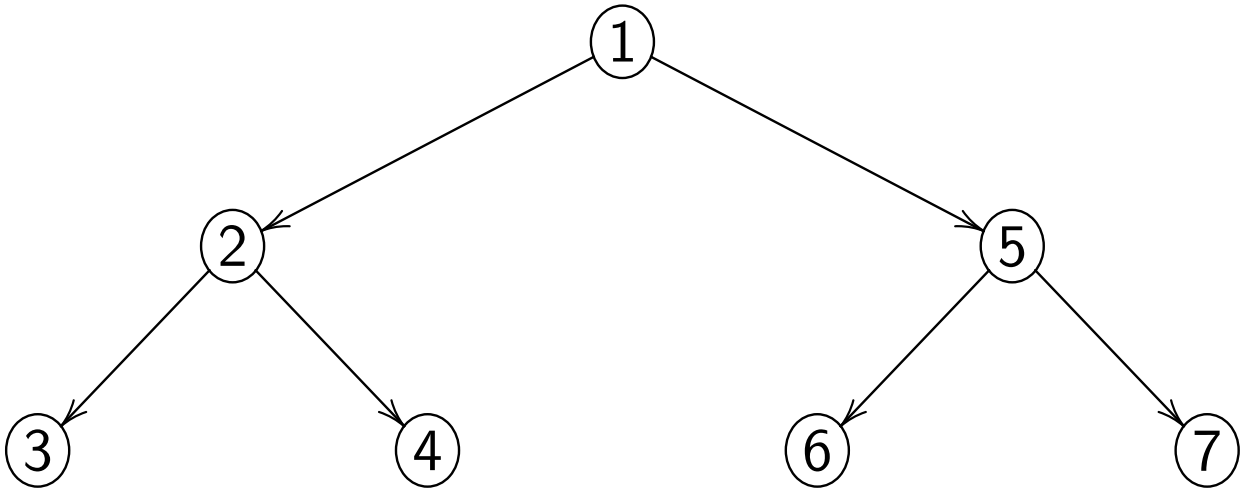
FIGURE – Ordre dans lequel les nœuds sont visités (en exposant) dans un parcours en profondeur préfixe. Les lettres correspondent à la numérotation par parcours en largeur.

Type OCAML (rappel)

Il y a beaucoup de façon de définir les arbres binaires en Ocaml. En voici une :

```
type 'a tree = Nil | Node of 'a tree * 'a * 'a tree;;

let t = let g = Node(Node(Nil,3,Nil),2,Node(Nil,4,Nil)) and
  d = Node(Node(Nil,6,Nil),5,Node(Nil,7,Nil)) in
  Node(g,1,d);;
```



Parcours préfixe

Principe

Dès qu'on passe par un nœud, on effectue un traitement de son étiquette. On n'attend pas que les descendants du nœud soient traités. On fait ce qu'on a à faire avec ce nœud dès qu'on passe dessus.

```
let rec parcours_prefixe = function
  | Nil ->  ()
  | Node (g, r, d) ->
    Printf.printf "%d " r;
    parcours_prefixe g; parcours_prefixe d ;;

parcours_prefixe a;;
```

On obtient **1 2 3 4 5 6 7**.

Parcours suffixe

Principe

Quand on passe sur un nœud, on attend que tous ses descendants soient traités avant d'agir sur ce nœud.

```
let rec parcours_suffixe = function
  | Nil -> ()
  | Node (g, r, d) -> parcours_suffixe g ;
                      parcours_suffixe d;
                      Printf.printf "%d " r ;;

parcours_suffixe a;;
```

On obtient **3 4 2 6 7 5 1**

Parcours infixe

Principe

Quand on passe sur un nœud, on traite d'abord le fils gauche. Puis on traite le nœud lui même. Et enfin on traite le second fils.

```
let rec parcours_infixe = function
  | Nil ->  ()
  | Node (g, r, d) -> parcours_infixe g ;
                      Printf.printf "%d " r ;;
                      parcours_infixe d;;

parcours_infixe a;;
```

On obtient **3 2 4 1 6 5 7**

Compléments

- La complexité du parcours en profondeur pour un arbre a déjà été étudiée : c'est celle du calcul de la hauteur (laquelle est un parcours suffixe dans notre code puisque le traitement a lieu lorsqu'on connaît la hauteur des 2 fils) : $\Theta(n)$

Compléments

- La complexité du parcours en profondeur pour un arbre a déjà été étudiée : c'est celle du calcul de la hauteur (laquelle est un parcours suffixe dans notre code puisque le traitement a lieu lorsqu'on connaît la hauteur des 2 fils) : $\Theta(n)$
- Le parcours préfixe (resp. suffixe) est injectif (si l'on considère que **Node(Nil,x,f)=Node(f,x,Nil)**. Voir TD.

BFS

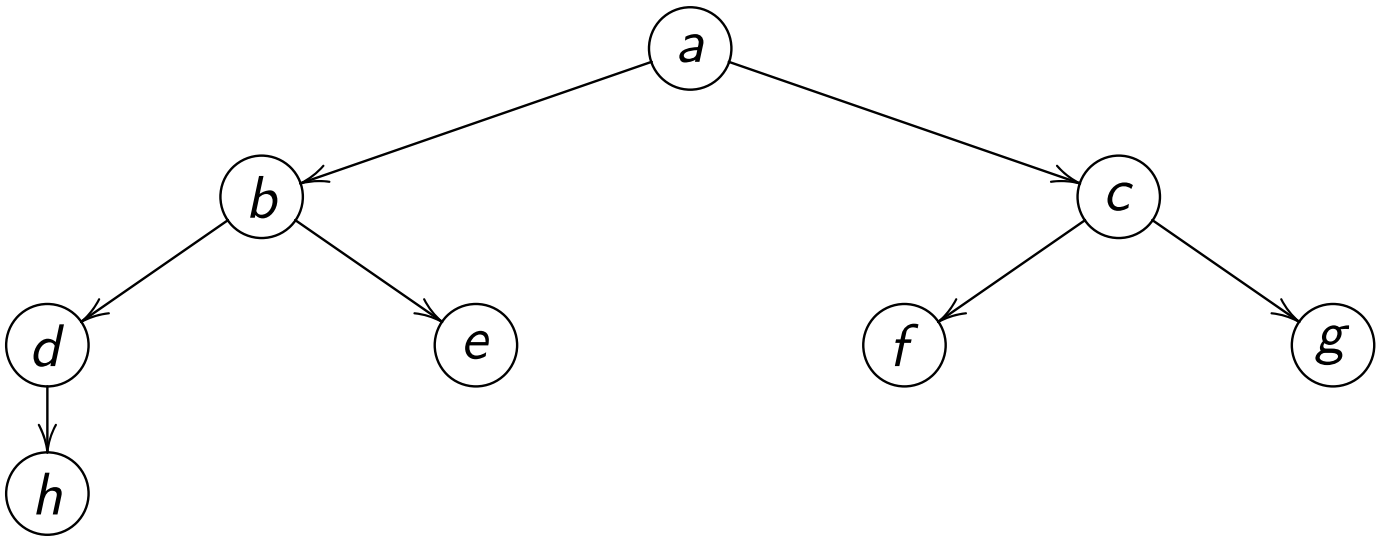
- L'algorithme de *parcours en largeur* (ou BFS, pour Breadth First Search en anglais) permet le parcours d'un arbre de la manière suivante : on commence par explorer un nœud source, puis tous ses fils, puis les fils des fils, etc.

BFS

- L'algorithme de *parcours en largeur* (ou BFS, pour Breadth First Search en anglais) permet le parcours d'un arbre de la manière suivante : on commence par explorer un nœud source, puis tous ses fils, puis les fils des fils, etc.
- En bref, on visite complètement une génération avant de visiter la génération suivante.

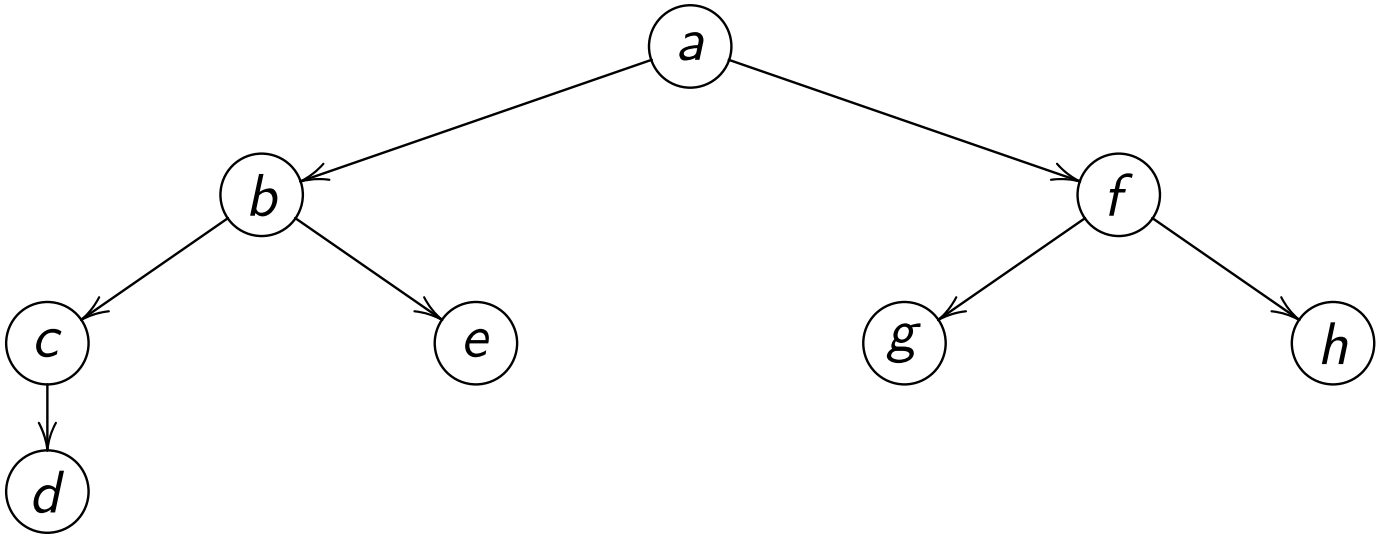
Un exemple : BFS

La dénomination des nœuds suivants respecte le parcours en largeur :



Un exemple : BFS vs DFS

La dénomination des nœuds suivants respecte le parcours en profondeur :



Deux fonctions auxiliaires

- Liste des étiquettes des racines d'une forêt (*i.e.* un ens. d'arbres) :

```
let rec label_list f = match f with
  | [] -> []
  | Nil::q->label_list q
  | Node(_,x,_)::q->x::(label_list q);;
```

Deux fonctions auxiliaires

- Liste des étiquettes des racines d'une forêt (*i.e.* un ens. d'arbres) :

```
let rec label_list f = match f with
  | [] -> []
  | Nil::q->label_list q
  | Node(_,x,_)::q->x::(label_list q);;
```

- Liste des fils des racines d'une forêt (si ce sont des nœuds internes).

```
let rec sons f =match f with
  | [] -> []
  | Nil::q -> sons q
  | Node(Nil,_,Nil)::q->sons q
  | Node(Nil,_,d)::q-> d::(sons q)
  | Node(g,_,Nil)::q-> g::(sons q)
  | Node(g,_,d)::q-> g::(d::(sons q));;
```

Le parcours en largeur

- La fonction **sons** retourne une forêt, **label_list** retourne la liste des étiquettes de la forêt.

Le parcours en largeur

- La fonction **sons** retourne une forêt, **label_list** retourne la liste des étiquettes de la forêt.
- La fonction **bfs** utilise la fonction **aux** qui prend une forêt et concatène la liste de ses étiquettes avec la liste des étiquettes des fils des racines.

Le parcours en largeur

- La fonction **sons** retourne une forêt, **label_list** retourne la liste des étiquettes de la forêt.
- La fonction **bfs** utilise la fonction **aux** qui prend une forêt et concatène la liste de ses étiquettes avec la liste des étiquettes des fils des racines.
- Code :

```
let bfs t =
      let rec aux les_t = match les_t with
        | [] -> []
        | _ -> (label_list les_t) @ (aux (sons les_t))
      in aux [t];;
```

Le parcours en largeur

- La fonction **sons** retourne une forêt, **label_list** retourne la liste des étiquettes de la forêt.
- La fonction **bfs** utilise la fonction **aux** qui prend une forêt et concatène la liste de ses étiquettes avec la liste des étiquettes des fils des racines.
- Code :

```
let bfs t =
      let rec aux les_t = match les_t with
        | [] -> []
        | _ -> (label_list les_t) @ (aux (sons les_t))
      in aux [t];;
```

- Complexité : chaque étiquette est ajoutée une fois et une seule à la liste résultat, on a envie de dire que la complexité est en $\Theta(n)$.

Le parcours en largeur

- La fonction **sons** retourne une forêt, **label_list** retourne la liste des étiquettes de la forêt.
- La fonction **bfs** utilise la fonction **aux** qui prend une forêt et concatène la liste de ses étiquettes avec la liste des étiquettes des fils des racines.
- Code :

```
let bfs t =
      let rec aux les_t = match les_t with
        | [] -> []
        | _ -> (label_list les_t) @ (aux (sons les_t))
      in aux [t];;
```

- Complexité : chaque étiquette est ajoutée une fois et une seule à la liste résultat, on a envie de dire que la complexité est en $\Theta(n)$.
- Dans ce qui suit on note u_p la complexité pour calculer la liste des étiquettes des arbres à la profondeur p. Il s'agit de calculer u_0.

Complexité du parcours en largeur

Pour un arbre à n nœuds de hauteur h :

- La fonction qui récupére les étiquettes des racines d'une forêt F et celle qui récupère les fils sont de complexité $\Theta(|F|)$.

Complexité du parcours en largeur

Pour un arbre à n nœuds de hauteur h :

- La fonction qui récupére les étiquettes des racines d'une forêt F et celle qui récupère les fils sont de complexité $\Theta(|F|)$.
- A chaque étape, on récupère la liste des étiquettes des sous-arbres d'une même profondeur et on l'ajoute au résultat.

Complexité du parcours en largeur

Pour un arbre à n nœuds de hauteur h :

- La fonction qui récupére les étiquettes des racines d'une forêt F et celle qui récupère les fils sont de complexité $\Theta(|F|)$.
- A chaque étape, on récupère la liste des étiquettes des sous-arbres d'une même profondeur et on l'ajoute au résultat.
- Lorsqu'on traite la liste des nœuds de profondeurs p (disons qu'il y en a n_p) :

Complexité du parcours en largeur

Pour un arbre à n nœuds de hauteur h :

- La fonction qui récupére les étiquettes des racines d'une forêt F et celle qui récupère les fils sont de complexité $\Theta(|F|)$.
- A chaque étape, on récupère la liste des étiquettes des sous-arbres d'une même profondeur et on l'ajoute au résultat.
- Lorsqu'on traite la liste des nœuds de profondeurs p (disons qu'il y en a n_p) :
  - on récupère la liste de leurs étiquettes en $O(n_p)$;

Complexité du parcours en largeur

Pour un arbre à n nœuds de hauteur h :

- La fonction qui récupére les étiquettes des racines d'une forêt F et celle qui récupère les fils sont de complexité $\Theta(|F|)$.
- A chaque étape, on récupère la liste des étiquettes des sous-arbres d'une même profondeur et on l'ajoute au résultat.
- Lorsqu'on traite la liste des nœuds de profondeurs p (disons qu'il y en a n_p) :
  - on récupère la liste de leurs étiquettes en $O(n_p)$;
  - on les concatènes à gauche du résultat de l'appel récursif en $O(n_p)$;

Complexité du parcours en largeur

Pour un arbre à n nœuds de hauteur h :

- La fonction qui récupére les étiquettes des racines d'une forêt F et celle qui récupère les fils sont de complexité $\Theta(|F|)$.
- A chaque étape, on récupère la liste des étiquettes des sous-arbres d'une même profondeur et on l'ajoute au résultat.
- Lorsqu'on traite la liste des nœuds de profondeurs p (disons qu'il y en a n_p) :
  - on récupère la liste de leurs étiquettes en $O(n_p)$;
  - on les concatènes à gauche du résultat de l'appel récursif en $O(n_p)$;
  - la liste des fils des nœuds de profondeur p s'obtient aussi en $O(n_p)$.

Complexité du parcours en largeur

Pour un arbre à n nœuds de hauteur h :

- La fonction qui récupére les étiquettes des racines d'une forêt F et celle qui récupère les fils sont de complexité $\Theta(|F|)$.
- A chaque étape, on récupère la liste des étiquettes des sous-arbres d'une même profondeur et on l'ajoute au résultat.
- Lorsqu'on traite la liste des nœuds de profondeurs p (disons qu'il y en a n_p) :
  - on récupère la liste de leurs étiquettes en $O(n_p)$;
  - on les concatènes à gauche du résultat de l'appel récursif en $O(n_p)$;
  - la liste des fils des nœuds de profondeur p s'obtient aussi en $O(n_p)$.
  - A ceci s'ajoute le coût de l'appel interne.

Complexité du parcours en largeur

Pour un arbre à n nœuds de hauteur h :

- La complexité u_p vérifie donc une relation de la forme $u_p = n_p + u_{p+1}$. Donc $u_p - u_{p+1} = n_p$.

Complexité du parcours en largeur

Pour un arbre à n nœuds de hauteur h :

- La complexité u_p vérifie donc une relation de la forme $u_p = n_p + u_{p+1}$. Donc $u_p - u_{p+1} = n_p$.
- Au départ $u_0 - u_1 = 1$ (nombre de nœuds à la profondeur 0 : racine) et $u_h - u_{h+1} = n_h$ avec h la hauteur et u_{h+1} qui correspond au traitement de la liste vide (pas de nœud à la profondeur $h + 1$).

Complexité du parcours en largeur

Pour un arbre à n nœuds de hauteur h :

- La complexité u_p vérifie donc une relation de la forme $u_p = n_p + u_{p+1}$. Donc $u_p - u_{p+1} = n_p$.
- Au départ $u_0 - u_1 = 1$ (nombre de nœuds à la profondeur 0 : racine) et $u_h - u_{h+1} = n_h$ avec h la hauteur et u_{h+1} qui correspond au traitement de la liste vide (pas de nœud à la profondeur $h+1$).
- On somme sur les profondeurs allant de 0 (la racine) à h (la hauteur de l'arbre). C'est une série telescopique. On obtient

$$u_0 - \underbrace{u_{h+1}}_{\text{exploration liste vide}} = \text{cte} + \underbrace{\sum_{p=0}^{h} n_p}_{=n} = \Theta(n).$$

Complexité du parcours en largeur

Pour un arbre à n nœuds de hauteur h :

- La complexité u_p vérifie donc une relation de la forme $u_p = n_p + u_{p+1}$. Donc $u_p - u_{p+1} = n_p$.
- Au départ $u_0 - u_1 = 1$ (nombre de nœuds à la profondeur 0 : racine) et $u_h - u_{h+1} = n_h$ avec h la hauteur et u_{h+1} qui correspond au traitement de la liste vide (pas de nœud à la profondeur $h+1$).
- On somme sur les profondeurs allant de 0 (la racine) à h (la hauteur de l'arbre). C'est une série telescopique. On obtient

$$u_0 - \underbrace{u_{h+1}}_{\text{exploration liste vide}} = \text{cte} + \underbrace{\sum_{p=0}^{h} n_p}_{=n} = \Theta(n).$$

- La complexité est proportionnelle au nombre de nœuds : on aurait pu s'en douter !